Исследование асимптотик высоких порядков квантово-полевых разложений в теории развитой турбулентности.

Налимов М.Ю. Сергеев В.А.

Физический факультет, Кафедра статистической физики.

Санкт-Петербург, 2010

Инстантонный анализ в статике φ^4

- N-ый порядок теории возмущений

$$\mathcal{Q}(\dots;g) = \sum_{k\geq 0} \mathcal{Q}^{[k]}(\dots) g^k, \quad \mathcal{Q}^{[N]}(\dots) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dg}{g^{N+1}} \mathcal{Q}(\dots;g) \qquad (1.1)$$

- Растяжение переменных: $\varphi \to \sqrt{N}\varphi$, $g \to g/N$

$$S(\varphi) \;\to\; S(\varphi) = N\Big(\int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i}\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{\tau}{2}\varphi^2(\mathbf{x}) + \frac{g}{4!}(\varphi^2(\mathbf{x}))^2\right] + \ln g\Big) \qquad (1.2)$$

- Система уравнений стационарности $\delta S/\delta\varphi = 0$, $\partial S/\partial g = 0$:

$$[-\partial^2 + \tau]\varphi(\mathbf{x}) + \frac{g}{3!}\varphi^3(\mathbf{x}) = 0, \quad \frac{g}{4!}\int d\mathbf{x}\, \varphi^4(\mathbf{x}) = -1. \qquad (1.3)$$

- Асимптотический ряд с факториальным ростом коэффициентов (Lipatov, 1977):

$$\mathcal{Q}^{[N]}(\dots) = C_{\mathcal{Q}}\, N!(-a)^N N^{b_{\mathcal{Q}}}\Big(1 + O(1/N)\Big) \qquad (1.4)$$

Инстантонный анализ в динамике

- Martin-Siggia-Rose (MSR) действие $S(\varphi, \varphi')$
- Модели A-H (Honkonen-Komorova-Nalimov, 2005):

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_d = \varphi_{st} \tag{1.5}$$

Инстантонный анализ в турбулентности (2D)

- Уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\partial_t v_i(t,x)+(v\partial)v_i(t,x)-\nu\partial^2 v_i(t,x)+\partial_i p_i(t,x)=\xi_i(t,x),\ \partial_k\varphi_k=0 \quad (1.6)$$

- Коррелятор случайной силы (2D):

$$<\xi_i(t,x)\xi_j(t',x')>=\delta(t-t')(2\pi)^{-2}\int d^2kP_{ij}(k)N(k)\exp ik(x-x'), \quad (1.7)$$

где

$$P_{ij}(k)=\delta_{ik}-k_ik_j/k^2,\ N(k)=D_0k^2 \quad (1.8)$$

- Модель со статикой (2D):

$$S_{st}=-\nu v^2, \quad \delta S_{st}/\delta v_i=0\Rightarrow v_{st}=0 \quad (1.9)$$

Простая динамическая модель с $\varphi_{st} = 0$

- Модельная задача ($\varphi \in \mathcal{R}^2$):

$$\begin{gathered} \partial_t \varphi_i(t) + \nu \varphi_i(t) + g\varphi^2(t)\varepsilon_{im}\varphi_m(t) = \xi_i(t), \\ < \xi_i(t)\xi_j(t') >= \delta_{ij}\delta(t - t'), \\ S_{st} = -\nu\varphi^2. \end{gathered} \tag{2.1}$$

- MSR действие:

$$S(\varphi, \varphi') = (\varphi')^2/2 + \varphi'(\partial_t \varphi + \nu\varphi + g\varphi^2 \varepsilon\varphi), \tag{2.2}$$

- АВП для функции $< \varphi_1(0)\varphi_1(T) >^{[N]} = ?$

Уравнения стационарности

- Инстантонная система:

$$\begin{aligned} &-\partial_t \varphi'_i + \nu \varphi'_i + 2g\varphi_i \varphi'_k \varepsilon_{kl} \varphi_l + g\varphi^2 \varphi'_k \varepsilon_{ki} = 0, \\ &\partial_t \varphi_j + \varphi'_j + \nu \varphi_j + g\varphi^2 \varepsilon_{jk} \varphi_k = 0, \\ &g \int dt \varphi'_k \varepsilon_{kl} \varphi_l \varphi^2 = 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

- Интеграл движения: $\varphi'_k \varepsilon_{kl} \varphi_l = Const \equiv \mathcal{C}$
- Полярные координаты:

$$\begin{gathered} (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \to (|\varphi(t)|, \theta(t)), \quad (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t)) \to (|\varphi'(t)|, \theta'(t)) \\ x(t) \equiv \varphi_l(t)\varphi_l(t),\ y(t) \equiv \varphi'_l(t)\varphi'_l(t),\ z(t) \equiv \varphi_l(t)\varphi'_l(t) \end{gathered} \tag{2.4}$$

- Решение системы ($\lambda \equiv 2\sqrt{\nu^2 - 2g\mathcal{C}}$):

$$\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 e^{-\lambda t} + a_2 e^{\lambda t}, \\ y &= 2g\mathcal{C} a_0 + 2g\mathcal{C} \frac{\nu - \lambda/2}{\nu + \lambda/2} a_1 e^{-\lambda t} + 2g\mathcal{C} \frac{\nu + \lambda/2}{\nu - \lambda/2} a_2 e^{\lambda t}, \\ z &= -\nu a_0 - (\nu - \lambda/2) a_1 e^{-\lambda t} - (\nu + \lambda/2) a_2 e^{\lambda t}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

Функциональное пространство

- Граничное условие: $|\varphi| = 0,\ t \to -\infty \Rightarrow \mathcal{C} = 0$
- Тривиальный ответ: $< \varphi_1(0)\varphi_1(T) >^{[N]} = 0$
- Разбиение на два подпространства:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}(t) \equiv \varphi(t),\ t < 0\ (|\bar{\varphi}| = 0, t \to -\infty \Rightarrow \bar{\mathcal{C}} = 0),\\
&\bar{\varphi}'(t) \equiv \varphi'(t),\ t \le 0,\\
&\hat{\varphi}(t) \equiv \varphi(t),\ 0 < t < T\ (\hat{\mathcal{C}} \neq 0),\\
&\bar{\varphi}'(t) \equiv \varphi'(t),\ 0 < t \le T,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

- Непрерывное стационарное решение на всем пространстве:

$$\begin{gathered}
\bar{x}(0) = \hat{x}(0) = x(0) \equiv x_0\\
\hat{x}(T) = x(T) \equiv x_T\\
\theta(0) = 0,\ \theta(T) = \pi k, k \in \mathcal{Z}
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Асимптотическая оценка и численный анализ

- Асимптотическая оценка:

$$< \varphi_1(0)\varphi_1(T) >^{[N]} \approx \quad Const(-1)^N N^{N+1/2} \int_0^\infty \int_0^\infty dx_0 dx_T \; x_0 x_T \cdot \\ \cdot \exp\left(Nf(x_0, x_T, \hat{\mathcal{C}}(x_0, x_T, k)\right), \qquad (2.8)$$

- Интеграл накапливается на границе области (результат численного анализа при $\nu = 1, \;\; T = 1$).

Асимптотическая оценка (случай $T \sim 0$)

- Разложение в ряд при $T \sim 0$: $\varphi_i(T) = \varphi_i(0) + \frac{d\varphi_i(T)}{dT}\Big|_0 T + \ldots$
- Искомая асимптотика определяется множителем при g^N:

$$< \varphi_i(0)\varphi_i(T) >^{[N]} \approx < \varphi_i(0) \frac{d^N \varphi_i(T)}{dT^N}\Big|_0 >_{st} T^N/N!. \tag{2.9}$$

- Оценка для N-ой производной:

$$\frac{d^N \varphi_i(T)}{dT^N}\Big|_0 \approx -(\varepsilon_{im_1}(-\varepsilon_{m_1 m_2}(\ldots(-\varepsilon_{m_{N-1} m_N} \varphi_{m_N})\ldots)))(\varphi^2)^N g^N T^N/N! \tag{2.10}$$

- АВП корреляционной функции:

$$< \varphi_i(0)\varphi_i(T) >^{[2N]} \approx (-1)^N \nu^{-1}(2N+1)(T/\nu)^{2N} \tag{2.11}$$

АВП в турбулентности 2D ($T \sim 0$)

- АВП функции $< v_i(0,x) v_j(T,y) >^{[N]} = ?$
- При $T \sim 0$ порядок g^N определяется из $\left.\frac{d^N v_j(T,x)}{dT^N}\right|_0$
- Новая теория возмущений: $\bar{v}_j(0,x) = v_j(0,x) + gP_{jm}(\bar{v}_k(0,x)\partial_k)\bar{v}_m(0,x)$,

$$< v_i(0,x) v_j(T,y) >^{[N]} = < v_i(0,x) \bar{v}_j(0,y) >^{[N]} \; T^N/N! \qquad (3.1)$$

- Вставка δ функции и интегрирование по v:

$$S = -(\bar{v}_i + gP_{il}(\bar{v}\partial)\bar{v}_l) P_{ij} (\bar{v}_j + gP_{jm}(\bar{v}\partial)\bar{v}_m) \qquad (3.2)$$

- $\delta S/\delta \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{v}_{st} = 0$ (в объеме)

Существование решения

- Модель с действием: $S = -\varphi^2/2 - g\varphi^4/4!$

$$\varphi_{st}(x - x_0) \sim \delta(x - x_0), \ \ (|k| < \Lambda) \tag{3.3}$$

- Стационарное решение

$$\bar{v}_i(p) = -(g/4\pi^2)^2 \int_{|\eta|,|\xi|<\Lambda} d\eta d\xi \Big(\bar{v}_k(\xi)(p-\xi)_i P_{kj}(p-\xi) + \bar{v}_k(\xi)(p-\xi)_k P_{ij}(p-\xi) \Big) \bar{v}_s(\eta)(p-\xi-\eta)_s v_j(p-\xi-\eta) \tag{3.4}$$

Спасибо.