Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет

На правах рукописи

УДК 539.12

**Пастон
Сергей Александрович**

Построение гамильтониана квантовой теории поля в координатах светового фронта

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук В. А. Франке

С-Петербург
1999

Содержание

Введение 4

Глава I Метод построения гамильтониана в координатах светового фронта 12

1. Приведение результатов светоподобного и ковариантного расчетов диаграммы к виду, удобному для сравнения 14

2. Приведение разницы между ковариантным и светоподобным расчетами к сумме конфигураций 17

3. Поведение конфигурации при $\varepsilon \to 0$ 18

4. Процедура исправления гамильтониана и анализ возникающих контрчленов 23

Приложение 1 31

Приложение 2 34

Приложение 3 47

Глава II Гамильтониан в координатах светового фронта для некалибровочной теории поля 49

1. Четырехмерная модель с взаимодействием типа Юкавы 50

2. Бозонизованная двумерная КЭД 54

2.1. Анализ УФ расходимости 54

2.2. Построение гамильтониана 58

2.3. Использование регуляризации Паули-Вилларса 60

Глава III Гамильтониан КХД в координатах светового фронта . . . 67

1. Прямое применение метода к калибровочным теориям . . . 68

2. Введение дополнительной регуляризации . . . 69

3. Сравнение светоподобной и лоренцевой теорий возмущений . . . 74

4. Канонический гамильтониан в координатах светового фронта . . . 82

Приложение 1 . . . 87

Приложение 2 . . . 89

Приложение 3 . . . 92

Приложение 4 . . . 94

Заключение . . . 99

Список литературы . . . 101

Введение

Поиск подходов к решению задач квантовой теории поля в случае большой константы взаимодействия остается актуальным в течение длительного времени. Сейчас в рамках квантовой хромодинамики (КХД) для этой цели часто применяются расчеты на пространственно-временных решетках. Таким путем получены существенные результаты. Тем не менее, эти расчеты остаются весьма трудоемкими и обеспечивают невысокую точность, причем, как правило, трудно оценить погрешность расчетов теоретически. Поэтому представляет интерес изучение других возможных подходов к проблеме.

Задолго до появления КХД была предпринята попытка исследовать взаимодействие пионов и нуклонов, решая уравнение Шредингера в лоренцевой системе координат в рамках квантовой теории пионового и нуклонного полей. При этом состояния описывались способом, найденным ранее В. А. Фоком [1], с помощью векторов пространства, которое теперь носит его имя. Математический вакуум пространства Фока в данном случае совпадал с вакуумом свободной теории. Этот подход, известный теперь под названием метода Тамма-Данкова [2, 3], не привел к успеху. Причина состояла, прежде всего, в сложности физического вакуумного состояния, которое не совпадает с математическим вакуумом. Не описав физический вакуум, нельзя было исследовать какие-либо другие состояния. Если ввести ультрафиолетовое и инфракрасное обрезание, сделав число степеней свободы конечным, то, в принципе, можно представить физический вакуум вектором пространства Фока над вакуумом свободной теории. Но такое представление оказывается необозримо сложным, поскольку нужно обеспечить трансляционную инвариантность физического вакуума и удовлетворить требованию "разделения на пучки" (cluster decomposition property) в отношении средних по этому вакууму. В силу такого положения вещей уравнение Шредингера в лоренцевых координатах, где развитие идет по обычному времени, трудно применить для каких-либо расчетов в квантовой теории поля с большой константой взаимодействия.

Еще в 1949 г Дирак указал способ, позволяющий обойти трудности, связанные с описанием физического вакуумного состояния [4]. Он предложил применить координаты светового фронта (к. с. ф.) $x^{\pm} = (x^0 \pm x^3)/\sqrt{2}$, x^1, x^2, где x^0, x^1, x^2, x^3 – лоренцевы координаты, и использовать x^+ в качестве времени. При таком подходе теория квантуется канонически на поверхности $x^+ = const$, а генератор P_+ сдвига вдоль оси x^+ играет роль гамильтониана H. С другой стороны, генератор сдвига вдоль оси x^-, т. е. оператор импульса P_-, не смещает поверхности $x^+ = const$, на которой ведется квантование, и, по терминологии Дирака, является кинематическим (в отличие от динамического генератора P_+). Поэтому структура оператора P_- в теории со взаимодействием такова же, как в теории без взаимодействия, т. е. оператор P_- всегда квадратичен по операторам рождения и уничтожения ${a_n}^+(p_-, p_\perp)$, $a_n(p_-, p_\perp)$ и, как правило, имеет вид (после нормального упорядочения):

$$P_- = \int d^2p_\perp \int\limits_0^\infty dp_- \, p_- \sum_n {a_n}^+(p_-, p_\perp) a_n(p_-, p_\perp), \qquad \text{(B.1)}$$

где $p_\perp = (p_1, p_2)$, а индекс n нумерует типы операторов рождения и уничтожения. В то же время, в соответствии с условием спектральности оператор P_- положительно определен, в связи с чем в приведенной формуле интегрирование по p_- ведется только от 0 до ∞. На физическом вакууме Ω оператор P_- обращается в нуль, так что $P_-|\Omega\rangle = 0$, откуда получается $a_n(p_-, p_\perp)|\Omega\rangle = 0$.

В силу этого физический вакуум $|\Omega\rangle$ может быть использован в качестве математического вакуума пространства Фока, образованного с помощью операторов ${a_n}^+$. Вопрос об описании структуры физического вакуума не возникает. Спектр связанных состояний можно находить, решая уравнение Шредингера

$$P_+|\Psi\rangle = p'_+|\Psi\rangle \tag{B.2}$$

при условиях

$$P_-|\Psi\rangle = p'_-|\Psi\rangle, \quad P_\perp|\Psi\rangle = 0, \tag{B.3}$$

где p'_+, p'_- – числа, причем квадрат массы определяется из равенства

$$m^2 = 2p'_+p'_-. \tag{B.4}$$

Здесь $|\Psi\rangle$ – вектор только что упомянутого пространства Фока. Удовлетворить условиям $P_-|\Psi\rangle = p'_-|\Psi\rangle$, $P_\perp|\Psi\rangle = 0$, где p'_- выбирается произвольно, не составляет труда. Проблема состоит в решении уравнения Шредингера. Такой подход обычно называют "гамильтоновым подходом в координатах светового фронта".

Описанная схема встречается со значительными трудностями из-за возникающих расходимостей и из-за отсутствия явной Лоренц-инвариантности. Но возможность избежать непосредственного описания структуры физического вакуума есть столь существенное преимущество, что этот подход продолжает привлекать к себе внимание. Интерес к нему возрос с появлением квантовой хромодинамики.

Следует отметить, что координаты светового фронта и близкая по характеру "система бесконечно большого импульса" используются в квантовой теории поля не только в рамках гамильтонова подхода, основанного на непосредственном решении уравнения Шредингера. Многие результаты были получены путем изучения предельного случая быстродвижущихся систем отсчета в рамках явно Лоренц-инвариантной теории матрицы рассеяния или функций Грина [5, 6, 7, 8, 9, 10]. Но в диссертации рассматривается только гамильтонов подход.

Построение гамильтониана $H = P_+$ в к. с. ф. для теории с заданным лоренц-инвариантным исходным действием оказывается нетривиальной задачей. Это связано, прежде всего, с наличием специфических расходимостей при нулевых значениях импульса p_- виртуальных квантов. В частности, инвариантный элемент объема при интегрировании по гиперболоиду $p_\mu p^\mu = m^2$ имеет вид $d^2p_\perp dp_-/p_-$ и содержит p_- в знаменателе. Положение усложняется в калибровочных теориях. Уже в первых работах по этому вопросу [11, 12] выяснилось, что каноническое квантование на поверхности $x^+ = const$ можно выполнить только в калибровке $A_- = 0$ или в близких по характеру калибровках (например, $\partial_- A_- = 0$). Последнее связано с тем, что в теории возникают связи второго рода, решение которых, в частности, требует обращения ковариантной производной $D_- = \partial_- + igA_-$. С другой стороны, пропагатор Фейнмана в калибровке $A_- = 0$ имеет лишнее p_- в знаменателе, что усиливает сингулярности при $p_- = 0$ (во всяком случае в теории возмущений).

Вследствие сказанного требуется специальная регуляризация, которая заключается в вырезании окрестности значения $p_- = 0$ в пространстве импульсов тем или иным способом, что ведет к нарушению Лоренц-инвариантности (до снятия регуляризации). Этого при гамильтоновом подходе в к. с. ф. избежать нельзя. Калибровочную инвариантность можно, в принципе, сохранить, если вместо вырезания окрестности значения $p_- = 0$ применить ограничение пространства-времени по координате x^- $(-L \leq x^- \leq L)$ при периодических граничных условиях по x^- для всех полей [13]. В этом случае спектр импульса P_- становится дискретным, и четко выделяются "нулевые моды" полей A, т. е. фурье-моды, отвечающие значению $p_- = 0$. Чтобы сохранить калибровочную инвариантность, следует учесть эти нулевые моды. В той же работе было показано, что в теории возникают вторичные связи второго рода, из которых нужно найти указанные нулевые моды как функции других мод и подставить в гамильтониан. Эти связи столь сложны, что их решение оказывается невозможным. Поэтому приходится отбрасывать нулевые моды с самого начала в лагранжиане, что, ведет к нарушению калибровочной инвариантности. Таким образом, нарушения калибровочной инвариантности при регуляризации все равно избежать не удается.

В связи с изложенным формальное каноническое квантование на гиперповерхности $x^+ = const$ может порождать гамильтониан, который даже в пределе снятия регуляризации соответствует теории, не эквивалентной исходной Лоренц-инвариантной. Эквивалентность можно обеспечить, как правило, только добавляя к гамильтониану в к. с. ф. необычные контрчлены [14, 15].

В последние несколько лет появился ряд работ, в которых приближенный регуляризованный гамильтониан КХД строится непосредственно в координатах светового фронта (см. [16, 17] и цитированные там работы). Вид гамильтониана подбирается с помощью теории ренормгруппы на основе требования слабой зависимости результатов от предела ультрафиолетового обрезания, причем связь с обычной Лоренц-инвариантной теорией детально не прослеживается. Здесь предложены также методы упрощения гамильтониана и решения уравнения Шредингера. Техника, описанная в этих работах, представляет существенный интерес и продолжает развиваться. Однако остается неясным, до какой степени полученная таким образом теория в к. с. ф. соответствует обычной Лоренц-инвариантной КХД.

В связи со сказанным возникает задача построения такого гамильтониана в к. с. ф., который в пределе снятия регуляризации порождает теорию, эквивалентную обычной Лоренц-ковариантной. Эту эквивалентность в качестве необходимого условия нужно обеспечить, прежде всего, в рамках теории возмущений. Затем можно применить, в частности, технику, описанную в работах [16, 17] для упрощения полученного гамильтониана и последующих непертурбативных расчетов на основе уравнения Шредингера. При этом будет видна связь с обычной Лоренц-ковариантной теорией. Не исключено, разумеется, что эквивалентности в рамках теории возмущений недостаточно, так как может оказаться необходимым учет чисто непертурбативных эффектов. Однако построение гамильтониана, правильного в рамках теории возмущений, представляется необходимым шагом.

Диссертация посвящена построению такого гамильтониана. Предлагается метод его получения. Метод состоит в следующем. За основу берем канонический гамильтониан в к. с. ф. Кроме регуляризации ультрафиолетовых (УФ) расходимостей применяем регуляризацию особенностей при $p_- = 0$ с помощью обрезания $|p_-| \geq \varepsilon > 0$, т. е. путем исключения из теории тех Фурье-компонент каждого поля, для которых $|p_-| < \varepsilon$ (будем называть такую регуляризацию "светоподобной"). Затем в данном порядке теории возмущений по константе связи находим в пределе $\varepsilon \to 0$ все отличия между функциями Грина, порожденными гамильтонианом в к. с. ф. и вычисленными в лоренцевых координатах. После чего добавляем к гамильтониану в к. с. ф. контрчлены, компенсирующие найденные различия, и переходим к следующему порядку. Реально нет необходимости делать какие-либо вычисления в данном порядке, так как в диссертации разработан способ нахождения всех диаграмм Фейнмана (во всех порядках теории возмущений), дающих вклад в упомянутые отличия, и оценки этого вклада. Таким образом, метод позволяет получить гамильтониан в к. с. ф. в общем случае в виде бесконечного ряда по константе связи. Однако, часто удается представить этот ряд в виде небольшого числа слагаемых с неизвестными коэффициентами, т. е. получить гамильтониан в к. с. ф. в замкнутом виде. Предложенный метод применим для широкого класса теорий, в том числе к теории поля Янга-Миллса (и значит, для КХД) в калибровке $A_- = 0$.

В диссертации рассмотрено применение описанного метода к четырехмерной модели с взаимодействием типа Юкавы, к двумерной скалярной теории с экспоненциальным взаимодействием (типа модели синус-гордон), которая получается в результате бозонизации двумерной квантовой электродинамики (КЭД) [18, 19, 20, 21, 22], а также к четырехмерной КХД. В последнем случае для получения гамильтониана в замкнутом виде оказалось необходимым введение дополнительной инфракрасной (ИК) регуляризации, нарушающей калибровочную инвариантность. В результате получен гамильтониан КХД в к. с. ф., содержащий вместо одной константы связи десять неизвестных коэффициентов, причем доказано, что гамильтониан порождает правильную теорию возмущений только при некотором, неизвестном соотношении между этими коэффициентами.

Результаты диссертации опубликованы в работах [23, 24, 25, 26].

Материал изложен в диссертации следующим образом:

В главе I описан метод построения по заданному лагранжиану гамильтониана в к. с. ф., порождающего теорию возмущений, совпадающую в пределе снятия "светоподобной" регуляризации с соответствующей ковариантной теорией возмущений. Изложен лежащий в основе этого метода способ нахождения всех диаграмм Фейнмана, дающих в указанном пределе вклад в разницу между функцией Грина, полученной с помощью гамильтониана в к. с. ф. и соответствующей ковариантной функцией Грина.

В главе II приведены примеры применения метода к некалибровочным теориям. Во-первых, рассмотрена теория с взаимодействием типа Юкавы в четырех измерениях, для которой построен гамильтониан в к. с. ф. в замкнутом виде. Результат согласуется с выводами работы [14], сделанными на основе анализа диаграммы собственной энергии во всех порядках теории возмущений и прочих диаграмм Фейнмана в низших порядках. Во-вторых, рассмотрена скалярная теория, являющаяся результатом бозонизации двумерной КЭД. Эта теория является модификацией модели синус-гордон и нетривиальна из-за наличия неполиномиального взаимодействия. Получен гамильтониан в к. с. ф., порождающий теорию возмущений, совпадающую с ковариантной теорией возмущений по массе фермиона (которая после бозонизации играет роль константы связи).

В главе III показано, что прямое применение предложенного метода к КХД (а также к теории Янга-Миллса и КЭД) в калибровке $A_- = 0$ дает гамильтониан в к. с. ф., содержащий сколь угодно высокие степени полей, что не позволяет записать его в замкнутом виде. Для решения проблемы предложена дополнительная ИК регуляризация КХД, после введения которой применение упомянутого метода приводит, при специальном способе снятия регуляризации, к гамильтониану, пертурбативно эквивалентному ковариантной теории. Эта регуляризация, равно как и необходимые "светоподобная" и УФ регуляризации, нарушает калибровочную инвариантность, что приводит, в процессе УФ перенормировки, к появлению десяти неизвестных коэффициентов в гамильтониане.

Глава I
Метод построения гамильтониана в координатах светового фронта

Будем искать гамильтониан H в к. с. ф., порождающий теорию возмущений по константе связи, эквивалентную лоренц-ковариантной теории возмущений, построенной на основе из лагранжиана L. Предполагается, что гамильтониан содержит УФ регуляризацию (причем такую, что ее можно использовать и в к. с. ф. и в лоренцевых координатах, сохраняя лоренц-инвариантность хотя бы в плоскости $\{x^+, x^-\}$, поэтому, например, УФ обрезание по k_- не допустимо), а также "светоподобную" регуляризацию. Как уже говорилось во введении, "светоподобной" регуляризацией называется исключение из теории тех Фурье-компонент каждого поля, для которых значение импульса p_- удовлетворяет условию $|p_-| < \varepsilon$. Под эквивалентностью понимается следующее: совпадение в каждом порядке теории возмущений функций Грина, порождаемых гамильтонианом, и соответствующих ковариантных функций Грина при $\varepsilon \to 0$ и некоторой УФ перенормировке.

Известно [14, 27, 28], что нековариантная стационарная теория возмущений, обычно применяемая при гамильтоновом подходе в к. с. ф., может быть превращена в эквивалентную светоподобную теорию фейнмановского типа, и что затем путем пересуммирования подынтегральных выражений интегралов Фейнмана можно придать этим выражениям такой же вид как в лоренц-ковариантной теории. Но способ взятия интегралов оказывается специфическим: сначала должно быть выполнено интегрирование по компоненте импульса Q_+, а затем по остальным компонентам. Сказанное верно для любых диаграмм с внешними линиями, а диаграммы без внешних линий можно не рассматривать, так как они не влияют на спектр связанных состояний. Таким образом, различие между теорией возмущений, порождаемой гамильтонианом в к. с. ф., и лоренц-ковариантной теорий возмущений может иметь место только из-за разного способа вычисления интегралов Фейнмана (что нетривиально вследствие возможного отсутствия абсолютной сходимости их в псевдоевклидовом пространстве) и из-за наличия "светоподобной" регуляризации.

Строим гамильтониан в к. с. ф. H, начиная с канонического гамильтониана H^{can}, полученного из лагранжиана L стандартным образом. УФ регуляризация считается фиксированной. Будем в каждом порядке теории возмущений добавлять к гамильтониану "исправляющие" контрчлены, компенсирующие в данном порядке все отличия между результатом обычного вычисления интеграла Фейнмана (называем его "ковариантным" расчетом диаграммы) и "светоподобным" расчетом, под которым понимается интегрирование сначала по Q_+, затем по Q_-, Q_1, Q_2 при $|Q_-| \geq \varepsilon$ и последующее взятие предела $\varepsilon \to 0$. Ясно, что при поиске исправляющих контрчленов достаточно рассмотреть только 1-неприводимые диаграммы. "Исправленный" гамильтониан при некоторой зависимости его коэффициентов от параметров регуляризации, будет порождать после снятия этой регуляризации функции Грина, совпадающие с ковариантными. Процедура "исправления" гамильтониана будет подробно описана ниже (в п. 4), а сначала изложим способ, позволяющий находить все диаграммы, дающие ненулевую разницу между их ковариантным и светоподобным расчетами.

Заметим, что специфика светоподобного вычисления диаграмм сказывается лишь при интегрировании по переменным $Q_\pm = (Q_0 \pm Q_3)/\sqrt{2}$. Интегрирование же по поперечным импульсам $Q_\perp \equiv \{Q_1, Q_2\}$ производится при светоподобном и ковариантном вычислениях одинаковым образом (подразумевается наличие УФ регуляризации). Поэтому достаточно сравнивать результаты этих вычислений при фиксированных значениях поперечных импульсов (что эквивалентно двумерной задаче).

1. Приведение результатов светоподобного и ковариантного расчетов диаграммы к виду, удобному для сравнения

Рассмотрим произвольную 1-неприводимую диаграмму Фейнмана. Все внешние импульсы и все поперечные импульсы интегрирования считаем фиксированными, причем "$-$" компоненты внешних импульсов отличными от нуля, интегрирование ведем только по Q_+ и Q_-. Тогда соответствующий диаграмме интеграл можно записать в виде:

$$F = \lim_{æ \to 0} \int \frac{\prod_i d^2Q^i \quad f(Q^i, p^k)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + iæ)}. \tag{I.1}$$

Считаем, что вершины полиномиальны, а пропагатор имеет вид (при возможном наличии регуляризации Паули-Вилларса)

$$\frac{z(Q)}{\prod_j (Q^2 - m_j^2 + iæ)}, \text{ или } \frac{z(Q)\, Q_+}{(2Q_+Q_- + iæ)\prod_j (Q^2 - m_j^2 + iæ)}, \tag{I.2}$$

где $z(Q)$ – полином. Пропагатор второго типа возникает в калибровочных теориях в калибровке $A_- = 0$ при использовании формализма Мандельстама-Лейббрандта [29, 30]. В выражении (I.1) либо $M_i^2 = m_i^2 + {Q_\perp^i}^2$, где m_i – масса частицы, либо $M_i^2 = 0$. В первом случае предполагается, что $M_i^2 \neq 0$, причем если $m_i = 0$, то вводится дополнительно обрезание ${Q_\perp^i}^2 \geq v^2 > 0$, которое затем снимается. Функция f содержит числители всех пропагаторов и все вершины с необходимыми δ-функциями, включающими внешние импульсы p^k (то же выражение без δ-функций, являющееся полиномом, обозначаем через $\tilde{f}$). Считаем, что для диаграммы F и для любой ее поддиаграммы выполнены условия

$$\omega_\| < 0, \qquad \omega_+ < 0, \tag{I.3}$$

где ω_+ – индекс расходимости по Q_+ при $Q_-^i \neq 0\ \forall i$, а $\omega_\|$ – индекс расходимости по Q_+ и Q_- (совместно);

$$Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0 \pm Q_3). \tag{I.4}$$

Не удовлетворяющие этому условию диаграммы нужно рассматривать отдельно для каждой конкретной теории (обычно их конечное число). В частности, закороченные линии всегда можно исключить с помощью нормального упорядочивания. Будем искать разницу между значением интеграла (I.1) при светоподобном и ковариантном расчетах.

При светоподобном расчете вводится, а затем снимается светоподобное обрезание $|Q_-| \geq \varepsilon > 0$:

$$F_{\text{св}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{æ \to 0} \int\limits_{V_\varepsilon} \prod_i dQ_-^i \int \prod_i dQ_+^i \frac{f(Q^i, p^k)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + iæ)}, \quad \text{(I.5)}$$

где $V_\varepsilon = \prod_i ((-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty))$. Здесь (а также в конфигурациях диаграммы, определения которых появятся ниже) берется предел по ε, но, вообще говоря, данный предел может не существовать. В этом случае будем считать, что берется не предел, а сумма всех членов неположительной степени ряда Лорана по ε в точке ноль. При выполнении условий (I.3) можно применить утверждение 2 из приложения 1. Тогда возникнет равенство

$$F_{\text{св}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{æ \to 0} \int \prod_k dq_+^k \int\limits_{V_\varepsilon \cap B_L} \prod_k dq_-^k \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + iæ)}. \quad \text{(I.6)}$$

Здесь и далее импульсы линий Q^i должны быть выражены через петлевые импульсы q^k, B_L – шар радиуса L, причем величина L зависит от внешних импульсов. Теперь, применяя утверждение 1 из приложения 1, получим

$$F_{\text{св}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{æ \to 0} \lim_{\beta \to 0} \lim_{\gamma \to 0} \times$$

$$\times \int \prod_k dq_+^k \int\limits_{V_\varepsilon} \prod_k dq_-^k \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)\ e^{-\gamma \sum_i {Q_+^i}^2 - \beta \sum_i {Q_-^i}^2}}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + iæ)}. \quad \text{(I.7)}$$

Чтобы привести ковариантный интеграл Фейнмана к виду, аналогичному (I.6), введем величину $\hat{F}$:

$$\hat{F} = \lim_{æ \to 0} \lim_{\beta \to 0} \lim_{\gamma \to 0} \int \prod_k d^2 q^k \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)\ e^{-\gamma \sum_i {Q_+^i}^2 - \beta \sum_i {Q_-^i}^2}}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + iæ)}. \quad \text{(I.8)}$$

Докажем, что эта величина совпадает с результатом лоренц-ковариантного расчета $F_{\text{ков}}$. Для этого введем α-представление в пространстве Минковского для пропагатора

$$\frac{z(Q^i)}{2Q^i_+Q^i_- - M_i^2 + i\text{æ}} =$$
$$= -iz\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\int\limits_0^\infty e^{i\alpha_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2 + i\text{æ}) + i(Q^i_+y_i^+ + Q^i_-y_i^-)}d\alpha_i\Big|_{y_i=0}. \quad \text{(I.9)}$$

Подставим (I.9) в (I.8). Из-за наличия режущих экспонент по q^k_+, q^k_- и α^i интеграл по этим переменным сходится абсолютно, так что можно переставить интегрирования по q^k_+, q^k_- и по α^i. В результате получим равенство

$$\hat{F} = \lim_{\text{æ}\to 0}\lim_{\beta\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\int\limits_0^\infty \prod_n d\alpha_i\ \hat{\varphi}(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta)\ e^{-\text{æ}\sum_i\alpha_i}, \quad \text{(I.10)}$$

$$\hat{\varphi}(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta) = (-i)^n\tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\times$$
$$\times\int\prod_k d^2q^k\ e^{\sum_i\left[i\alpha_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2) + i(Q^i_+y_i^+ + Q^i_-y_i^-) - \gamma {Q^i_+}^2 - \beta {Q^i_-}^2\right]}\Big|_{y_i=0}. \quad \text{(I.11)}$$

Для лоренц-ковариантного расчета в α-представлении при выполнении условий (I.3) известно выражение [31]

$$F_{\text{ков}} = \lim_{\text{æ}\to 0}\int\limits_0^\infty\prod_n d\alpha_i\ \varphi_{\text{ков}}(\alpha_i, p^s)\ e^{-\text{æ}\sum_i\alpha_i}, \quad \text{(I.12)}$$

$$\varphi_{\text{ков}}(\alpha_i, p^s) = (-i)^n\tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\lim_{\gamma,\beta\to 0}\times$$
$$\times\int\prod_k d^2q^k\ e^{\sum_i\left[i\alpha_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2) + i(Q^i_+y_i^+ + Q^i_-y_i^-) - \gamma {Q^i_+}^2 - \beta {Q^i_-}^2\right]}\Big|_{y_i=0}. \quad \text{(I.13)}$$

В приложении 2 показано, что в выражении (I.10) пределы по γ и β (поочередно) можно пронести через знак интеграла по $\{\alpha_i\}$, а затем через $\tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$. Тогда, сравнивая соотношения (I.10), (I.11) и (I.12), (I.13), легко убедиться, что

$\hat{F} = F_{\text{ков}}$. Учитывая формулу (I.8) и используя утверждение 1 из приложения 1, получаем равенство

$$F_{\text{ков}} = \lim_{æ \to 0} \int \prod_k dq_+^k \int_{B_L} \prod_k dq_-^k \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + iæ)}. \qquad \text{(I.14)}$$

Выражение (I.14) отличается от (I.6) только областью интегрирования по q_-^k. Следовательно, разница между ковариантным и светоподобным расчетами дается интегралом с таким же подынтегральным выражением и областью интегрирования по q_-^k равной $B_L \setminus (V_\varepsilon \cap B_L)$.

2. Приведение разницы между ковариантным и светоподобным расчетами к сумме конфигураций

Введем для каждой линии разбиение

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dQ_- + \int_{\varepsilon}^{\infty} dQ_- \right) = \left[\int dQ_- + (-1) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dQ_- \right]. \qquad \text{(I.15)}$$

Определим понятия: линия 1-ого рода – это линия, интегрирование по импульсу Q_-^i которой ведется в области $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (до снятия δ-функций); линия 2-ого рода – в области $(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$; полная линия – в области $(-\infty, \infty)$. На диаграммах будем их обозначать, как показано на рис. 1, *а*, *б*, *в*. Подставим разбиение (I.15) в формулу (I.6) для $F_{\text{св}}$ и

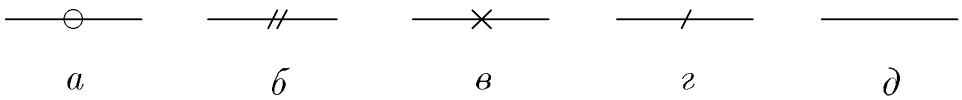

Рис. 1. Обозначения разных типов линий на диаграммах: *а*) линия 1-ого рода; *б*) линия 2-ого рода; *в*) полная линия, *г*) ε-линия, *д*) П-линия.

раскроем квадратные скобки. Среди получившихся слагаемых есть $F_{\text{ков}}$ (выражение (I.14)). Остальные слагаемые (до взятия предела по ε) назовем конфигурациями диаграммы и обозначим через F_j. Получается соотношение

$$F_{\text{ков}} - F_{\text{св}} = \sum_j \lim_{\varepsilon \to 0} F_j, \tag{I.16}$$

где

$$F_j = \lim_{\text{æ} \to 0} \int \prod_k dq_+^k \int\limits_{V_\varepsilon^j \cap B_L} \prod_k dq_-^k \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + i\text{æ})}, \tag{I.17}$$

где V_ε^j – область, соответствующая расположению полных линий и линий 1-ого рода в данной конфигурации.

Заметим, что формулы (I.14) и (I.17) можно применять последовательно: сначала применить к поддиаграмме, а затем подставить в формулу для всей диаграммы. Это допустимо, так как после деформации контуров, описанной в доказательстве утверждения 1 приложения 1, интеграл по петлевым импульсам $\{q_+^k\}$ поддиаграммы сходится (после интегрирования по переменным $\{q_-^k\}$ этой поддиаграммы) абсолютно и равномерно по оставшимся петлевым импульсам $\{q_-^{k'}\}$, и значит, интегралы по $\{q_+^k\}$ и $\{q_-^{k'}\}$ можно переставлять.

Итак, разница между ковариантным и светоподобным расчетами диаграммы дается суммой всех ее конфигураций в пределе $\varepsilon \to 0$. Конфигурацией диаграммы называется эта же диаграмма, для каждой линии которой задано, является она полной или линией 1-ого рода, причем существует хотя бы одна линия 1-ого рода.

3. Поведение конфигурации при $\varepsilon \to 0$

Будем считать, что у рассматриваемой диаграммы внешние импульсы p^s фиксированы, причем

$$p_-^s \neq 0, \quad \sum_{s'} p_-^{s'} \neq 0, \tag{I.18}$$

где сумма берется по любому набору внешних импульсов (кроме, естественно, всех) и считается, что все они направлены внутрь диаграммы. Это условие не ограничивает общности, так как ему соответствует исключение множества меры ноль в пространстве аргументов функций Грина, что не влияет на физические результаты.

Рассмотрим произвольную конфигурацию. Будем называть ε-линиями все линии 1-ого рода и такие полные линии, для которых интегрирование по Q_- фактически не выходит за пределы области $(-r\varepsilon, r\varepsilon)$, где r – конечное число (далее поясняется, когда такие линии появляются). Все остальные полные линии будем называть П-линиями. На диаграммах ε-линии и П-линии будем обозначать, как показано на рис. 1, *г, д*. Заметим, что диаграмма может быть нарисована линиями *а* и *в* из рис. 1 (это однозначно задает конфигурацию), а может – линиями *г* и *д* (тогда нет).

Если к вершине подходит только одна полная линия, а остальные линии 1-ого рода, то из-за сохранения импульса в вершине указанная полная линия является ε-линией. Оставшиеся полные линии образуют поддиаграмму (возможно, несвязную). Из-за условий (I.18) и того, что ε сколь угодно мало, существует ее связная часть, к которой подходят все внешние линии. Для остальных связных частей все линии, внешние по отношению к этим связным частям, являются ε-линиями, следовательно, применяя утверждение 1 из приложения 1, видим, что интегрирование по внутренним импульсам этих связных частей можно вести в области размера порядка ε, т. е. все их внутренние линии – это ε-линии. Таким образом, произвольную конфигурацию можно нарисовать так, как показано на рис. 2, и ей сопоставляется интеграл (I.17) с соответствующей областью интегрирования.

Исследуем поведение конфигурации при $\varepsilon \to 0$. С этого момента удобно представлять пропагатор не в виде (I.2), а в форме

$$\frac{\tilde{z}(Q)}{\prod_j \left(Q^2 - m_j^2 + i\ae\right)},$$

$$\text{где} \quad \tilde{z}(Q) = z(Q) \ \text{ или } \ \tilde{z}(Q) = \frac{z(Q)}{2Q_- + i\ae/Q_+}. \tag{I.19}$$

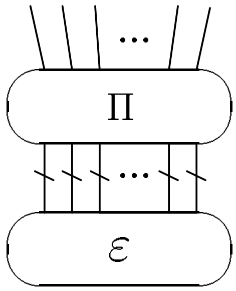

Рис. 2. Вид произвольной конфигурации. П – связная поддиаграмма, состоящая из П-линий; $\mathcal{E}$ – поддиаграмма, состоящая из ε-линий, возможно, не содержащая ни одной вершины.

Тогда в выражении (I.1) $M_i^2 = m_i^2 + {Q_\perp^i}^2 \neq 0$, а функция $\tilde{f}$ уже не является полиномом. Если числитель подынтегрального выражения состоит из нескольких слагаемых, то будем каждое слагаемое рассматривать отдельно (за исключением случая, когда на слагаемые разбивается пропагаторный импульс Q_-^i при его выражении через петлевые и внешние импульсы).

Будем обозначать петлевые импульсы поддиаграммы П из рис. 2 через q^l, а остальные петлевые импульсы через k^m. Все k_-^mимеют порядок ε. Сделаем в выражении (I.17) замену переменных интегрирования

$$k_-^m \to \varepsilon\, k_-^m. \tag{I.20}$$

Тогда интегрирование по k_-^m будет идти в конечных пределах, не зависящих от ε. Степень ε в общем множителе, возникшую из элементов объема и числителей при преобразовании (I.20) обозначим через τ. При этом считаем, что вклад в τ от выражения $1/(2Q_- + i\text{æ}/Q_+)$ из формулы (I.19), относящегося к ε-линии, равен -1. Разобьем область интегрирования по k_+^m, q_+^l на секторы так, чтобы в пределах одного сектора импульсы всех полных линий Q_+^i имели постоянный знак. В утверждении 1 приложения 1 показано, что для каждого сектора можно изогнуть контуры интегрирования по q_-^l, k_-^m так, что будет иметь место абсолютная сходимость по q_+^l, k_+^m, q_-^l, k_-^m. Так как при этом импульсы Q_-^i П-линий отделены от нуля не зависящей от ε константой, то соответствующие пропагаторы и множители из вершин, связанные с П-линиями, можно после замены (I.20) разложить в ряд по ε, и это разложение будет перестановочно с интегрированием. Оттуда же видно, что знаменатели пропагаторов допускают оценки при неограниченном росте $|Q_+|$:

$$\left|\frac{1}{2Q_+Q_- - M^2 + i\text{æ}}\right| \le \begin{cases} \dfrac{1}{c\,|Q_+|} & \text{для П-линий,} \quad \text{(I.21)} \\ \dfrac{1}{\tilde{c}\,\varepsilon\,|Q_+|} & \text{для } \varepsilon\text{-линий,} \quad \text{(I.22)} \end{cases}$$

где c, $\tilde{c}$ - не зависящие от ε константы. Заметим, что при всех Q_+ те же выражения ограничены равномерно по Q_+ при $\varepsilon \to 0$. После замены (I.20) и вынесения множителя $\frac{1}{\varepsilon}$ (в соответствии со сказанным о вкладе в τ) выражение из формулы (I.19), относящееся к ε-линии, изменится следующим образом

$$\left|\frac{1}{2Q_- + i\text{æ}/Q_+}\right| \to \left|\frac{1}{2Q_- + i\text{æ}/(Q_+\varepsilon)}\right| \le \frac{1}{2|Q_-|}, \qquad \text{(I.23)}$$

где сделана оценка величиной, не зависящей от Q_+ (причем эта величина имеет смысл и не зависит от ε, так как Q_- после замены (I.20) и учета упоминавшегося изгибания контуров интегрирования по k_-^m отделен от нуля константой, не зависящей от ε).

Будем интегрировать сначала по q_+^l, k_+^m в пределах одного сектора, а затем по q_-^l, k_-^m (заметим, что последний интеграл сходится равномерно по ε). Рассмотрим сходимость интеграла по q_+^l, k_+^m при вычеркнутых знаменателях ε-линий (что эквивалентно оцениванию выражений (I.22) константой). Если он сходится, то исходный интеграл, очевидно, не зависит от ε и вклад от данного сектора в конфигурацию будет вести себя как ε^τ. Покажем, что, если он расходится со степенью расходимости α, то вклад в исходный интеграл будет вести себя как $\varepsilon^{\tau-\alpha}$ с точностью до логарифмических поправок. Для этого разобьем область интегрирования по q_+^l, k_+^m на две области: U_1, лежащую внутри шара радиуса

Λ/ε (Λ фиксируется далее) и U_2, лежащую вне этого шара (напомним, что рассуждение ведется для каждого сектора отдельно). Теперь оценим (I.21) (как и (I.22)) через $\dfrac{1}{\hat{c}\varepsilon|Q_+|}$ (что допустимо) и сделаем замену переменных интегрирования

$$q_+^l \to \frac{1}{\varepsilon}\, q_+^l, \quad k_+^m \to \frac{1}{\varepsilon}\, k_+^m. \tag{I.24}$$

После вынесения общего множителя ε из числителя и элемента объема подынтегральное выражение от ε не зависит. Интеграл сходится, значит можно выбрать такое Λ (не зависящее от ε), что вклад области U_2 будет по модулю меньше вклада области U_1; следовательно, весь интеграл можно оценить через интеграл по конечной области U_1. Теперь сделаем замену, обратную замене (I.24) и оценим выражения (I.22) константой (как уже делалось выше). Так как размер области интегрирования равен Λ/ε, а степень расходимости есть α, то интеграл будет вести себя как $\varepsilon^{-\alpha}$ (с точностью до логарифмических поправок), что и требовалось доказать. Это верно для каждого сектора, а значит и для конфигурации в целом. Очевидно, что

$$\alpha = \max_r \alpha_r, \tag{I.25}$$

где α_r – индекс расходимости поддиаграммы при вычеркнутых знаменателях ε-линий, а максимум берется по всем поддиаграммам D_r, где каждая поддиаграмма D_r либо 1-неприводима, либо состоит их нескольких не связанных между собой 1-неприводимых диаграмм (в последнем случае α_r есть сумма индексов расходимости связных частей). В рассматриваемом случае

$$\alpha_r = \omega_+^r + \nu^r, \tag{I.26}$$

где ν^r - число внутренних ε-линий в поддиаграмме D_r. Под $\omega_\pm^r$ понимаются обычные индексы УФ расходимости поддиаграммы D_r по $Q_\pm$. Ранее была введена величина τ, равная степени ε, возникающей из числителей и элементов объема всей конфигурации. Можно написать

$$\tau = \omega_-^r - \mu^r + \nu^r + \eta^r, \tag{I.27}$$

где μ^r - индекс УФ расходимости по Q_- поддиаграммы (возможно, древесной или несвязной), состоящей из П-линий, входящих в D_r; η^r - степень ε в общем множителе, возникшая при преобразовании (I.20) из элементов объема, вершинных множителей и числителей линий, не вошедших в D_r (подразумевается, что импульсы интегрирования выбраны так, как при подсчете ее индексов расходимости). Тогда, учитывая, что

$$\tau - \alpha_r = \omega_-^r - \omega_+^r - \mu^r + \eta^r, \tag{I.28}$$

получаем с точностью до логарифмических поправок

$$F_j \sim \varepsilon^\sigma, \quad \sigma = \min_r(\tau, \omega_-^r - \omega_+^r - \mu^r + \eta^r). \tag{I.29}$$

Следовательно, в пределе $\varepsilon \to 0$ конфигурация равна нулю, если для нее $\sigma > 0$. Соотношение (I.29) позволяет выделить все ненулевые конфигурации.

С целью сделать идею способа нахождения ненулевых конфигураций более прозрачной, в приложении 3 приведено еще раз, кратко и без технических подробностей, описание изложенного способа на примере однопетлевых диаграмм.

4. Процедура исправления гамильтониана и анализ возникающих контрчленов

Мы хотим построить исправленный гамильтониан в к. с. ф. H с обрезанием $|Q_-^i| \geq \varepsilon$, который при фиксированной УФ регуляризации порождал бы функции Грина, совпадающие в пределе $\varepsilon \to 0$ с ковариантными в рамках теории возмущений. За основу берем обычный канонический гамильтониан в светоподобных координатах H^{can} с обрезанием $|Q_-^i| \geq \varepsilon$. Считаем известным, что подынтегральные выражения диаграмм Фейнмана, полученные из такого светоподобного гамильтониана, совпадают с ковариантными после определенного пересуммирования [14, 27, 28]. Но разница может возникнуть из-за различий в способе взятия интеграла и в выборе области интегрирования. Как показано в п. 2, эта разница равна (после взятия предела $\varepsilon \to 0$) сумме всех конфигураций диаграммы, построенных соответствующим образом. Надо добавить к H^{can} такие исправляющие контрчлены, которые порождают дополнительные диаграммы ("контрчленные"), сокращающие ненулевые (после взятия предела по ε) конфигурации всех диаграмм. Сделав это, мы получим искомый исправленный гамильтониан H. На самом деле, мы покажем лишь, как искать H, порождающий функции Грина, совпадающие с ковариантными везде, кроме множества меры ноль в пространстве внешних импульсов (определяемого условием (I.18)). Но это ограничение несущественно, так как такое возможное различие не сказывается на физических результатах.

Исправление будем вести аналогично процедуре перенормировки. Считаем, что теория возмущений строится по числу петель. Для случая полиномиального взаимодействия такая теория возмущений получается конечным пересуммированием из теории возмущений по константе связи. Особенности случая неполиномиального взаимодействия будут рассмотрены на соответствующей модели в п. II.2. Исправление ведем поэтапно: находим контрчлены к гамильтониану, порождающие все ненулевые конфигурации диаграмм не выше данного порядка (точнее, порождающие все неположительные члены разложения ненулевых конфигураций в ряд Лорана по ε), затем переходим к следующему порядку. Учитываем, что в нем появятся контрчленные диаграммы, возникшие из контрчленов, добавленных к гамильтониану в низших порядках. Теперь вводим новые исправляющие контрчлены, порождающие оставшуюся в этом порядке разницу. Покажем, как последовательно искать исправляющие контрчлены.

Назовем конфигурацию ненулевой, если она не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Будем называть ненулевую конфигурацию "первичной", если в ней Π – древесная поддиаграмма (см. рис. 2). Заметим, что для такой конфигурации разрыв любой Π-линии приводит при $\varepsilon \to 0$ к нарушению условий (I.18); получающийся при этом результат не будем считать конфигурацией. Будем говорить, что конфигурация "изменена", если в соответствующем ей интеграле (I.17) для всех П-линий проведено разложение в ряд по ε (см. п. 3, перед формулой (I.21)) и оставлены только члены, ненулевые в пределе $\varepsilon \to 0$ после интегрирования. Как упоминалось выше, разложение в такой ряд и интегрирование перестановочны. Значит, в пределе $\varepsilon \to 0$ измененная и неизмененная конфигурации совпадают; поэтому всегда будем требовать, чтобы контрчлены гамильтониана порождали измененные конфигурации, так как это упрощает вид контрчленов. С помощью дополнительных членов в гамильтониане можно порождать только контрчленные диаграммы, равные нулю при внешних импульсах, удовлетворяющих условию $|p_-^s| < \varepsilon$ (так как при применяемом обрезании внешние линии диаграмм не несут импульсов с $|p_-^s| < \varepsilon$). Всегда будем иметь это в виду.

Будем искать контрчлены по индукции. Ясно, что в первом порядке по числу петель все ненулевые конфигурации – первичные. Добавим порождающие их контрчлены к гамильтониану. Рассмотрим произвольный порядок теории возмущений. Пусть в более низких порядках все ненулевые конфигурации, которые можно получить из контрчленов с учетом сделанного замечания, уже порождены гамильтонианом (с указанными оговорками). Перейдем к данному порядку. Рассмотрим сначала ненулевые конфигурации, в которых есть только один петлевой импульс типа k, а остальные типа q (см. обозначения перед формулой (I.20)).

Будем поочередно разрывать по одной линии конфигурации, не затрагивая остальных линий (так, что концы разорванной линии станут внешними линиями). В результате разрыва может получиться конструкция, которая не считается конфигурацией (если для нее нарушаются условия (I.18)), нулевая конфигурация, или ненулевая конфигурация.

Если для любой разрываемой линии реализуется первый случай, то исходная конфигурация – первичная, и ее нужно породить контрчленами гамильтониана в данном порядке (см. рис. 3).

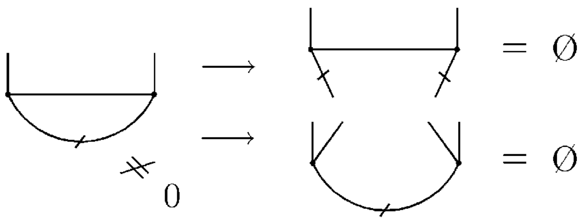

Рис. 3.

Символ $\emptyset$ на рисунке означает, что конструкция не считается конфигурацией.

В принципе, могло бы оказаться, что реализуются первый и второй случаи (см. рис. 4).

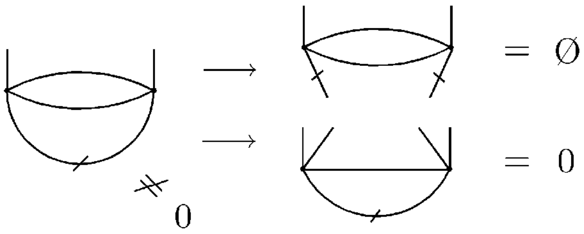

Рис. 4.

Покажем, что это не так. Реализация второго случая наряду с первым означает, что в исходной конфигурации существует петля, состоящая только из П-линий, и при разрывании каждой линии этой петли ненулевая конфигурация превращается в нулевую, т. е. происходит увеличение величины σ. Это не может происходить за счет увеличения τ, так как П-линии не дают вклада в τ. По этой же причине увеличение σ не может происходить при выборе поддиаграммы в формуле (I.29) так, чтобы она не включала разрываемую линию. Это означает, что поддиаграмма, дающая ненулевое значение σ для исходной конфигурации должна содержать все линии упомянутой петли. Увеличение σ при разрыве может происходить только за счет увеличения величины $\omega_-^r - \omega_+^r - \mu^r$. Заметим, что при разрыве одинаково меняются величины ω_-^r и μ^r, следовательно, σ может увеличиваться только за счет уменьшения ω_+^r, что может быть только если индекс расходимости по Q_+ разрываемой линии неотрицателен (учитываем, что при разрыве линии ω_+^r меняется не только за счет исчезновения пропагатора, но еще уменьшается на 1 из-за исчезновения одного элемента объема). Сказанное верно для всех линий упомянутой петли, что приводит к не менее чем линейной УФ расходимости по Q_+ состоящей из этой петли однопетлевой поддиаграммы. А это исключается условиями (I.3).

Теперь допустим, что для некоторой линии реализовался третий случай. Значит, получившаяся при разрыве конфигурация появляется из контрчленов в низших порядках (см. рис. 5).

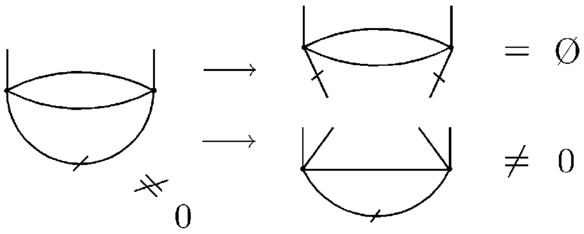

Рис. 5.

Тогда после восстановления разорванной линии (т. е. после проведения соответствующего интегрирования, что на рисунках символически обозначается пунктирной линией) оказывается, что контрчленами низших порядков порождена исходная конфигурация (учитываем замечание о последовательном применении формулы (I.17), см. конец п. 2) со следующими отличиями (см. рис. 6):

а) разорванная линия (и, возможно, еще некоторые, если после разрыва возникла неодносвязная диаграмма) является не П-линией, а линией 2-ого рода из-за условий $|p_-^s| \geq \varepsilon$;

б) если при восстановлении разорванной линии поведение при малых ε ухудшилось (т. е. σ уменьшилось), то в ряде Лорана по ε для получающейся после разрыва конфигурации будет учтено меньше членов, чем нужно принять во внимание для воспроизведения исходной конфигурации (это связано с тем, что контрчлены порождают "измененные" конфигурации, не содержащие членов ряда Лорана по ε положительных степеней).

Разложим появившиеся линии 2-ого рода, как это делалось выше, по формуле (I.15). Получится слагаемое, где все эти линии заменены П-линиями, и слагаемые, где некоторые из них (или все) стали линиями 1-ого рода. Во втором слу-

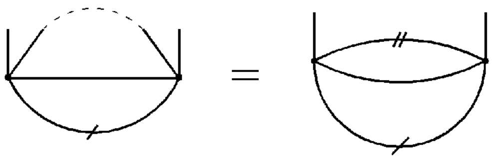

Рис. 6.

чае один из импульсов типа q превращается в импульс типа k, и эти слагаемые (назовем их "повторными" конфигурациями) будем анализировать вместе с конфигурациями, у которых два импульса типа k. В первом случае получаем исходную конфигурацию с точностью до отличия (*б*).

Если для каждой линии, для которой при разрывании реализуется третий случай, существует поддиаграмма, содержащая разрываемую П-линию и представляющая собой конфигурацию, для исправления которой в низшем порядке был добавлен к гамильтониану контрчлен, то мы имеем дело с ситуацией, аналогичной проблеме перекрывания расходимостей в теории перенормировок (см. рис. 7).

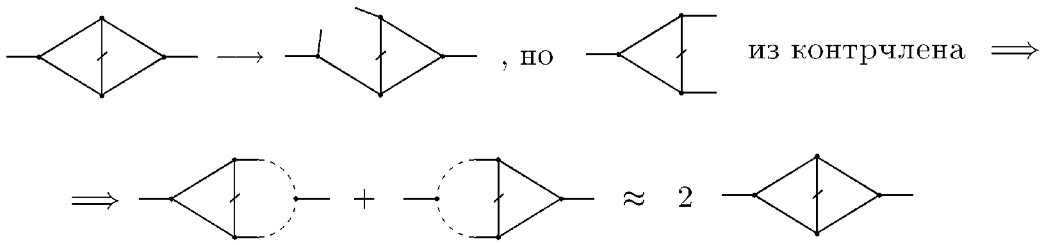

Рис. 7.

В этом случае исходная конфигурация будет порождена контрчленами низших порядков более одного раза и может существовать отличие (*б*). И то и другое должно быть дополнительно скомпенсировано в данном порядке, назовем соответствующие добавки "вторичными" конфигурациями.

Если же проблемы перекрывания не возникает, то отличие (*б*) не может существовать, что легко увидеть, повторяя проведенные при анализе возникновения второго случая рассуждения. Действительно, П-линии не дают вклада в τ, следовательно, увеличение величины σ не может происходить за счет увеличения τ, а также не может происходить при выборе поддиаграммы в формуле (I.29) так, чтобы она не включала разрываемую линию. А если включение происходит, то возникает описанная выше проблема перекрывания.

Поэтому оказывается, что если проблемы перекрывания не возникает, то в данном порядке исходную конфигурацию порождать контрчленами не нужно, с точностью до повторной конфигурации, которая рассматривается на следующем этапе.

Далее, переходим к следующему этапу – рассмотрению конфигураций с двумя импульсами типа k и т. д. вплоть до конфигураций со всеми импульсами типа k, а они являются первичными.

Таким образом, контрчленами гамильтониана нужно порождать конфигурации типа первичных (не только исходные первичные конфигурации, но и аналогичные им повторные) и вторичные конфигурации.

Ситуация упрощается при некоторых дополнительных предположениях. В частности, несложно доказать, что, если возникают только двуххвостые первичные конфигурации, то вторичных конфигураций нет вообще. С другой стороны, если для первичной конфигурации (все, естественно, аналогично и для повторной) степень расходимости α положительна и максимум в формуле (I.25) достигается на самой диаграмме, а $\sigma = 0$, то ее зависимость от внешних импульсов становится тривиальной. Действительно, так как $\sigma = 0$, в упоминавшихся выше рядах достаточно учесть только первый член; значит, все пропагаторы и множители из вершин, относящиеся к П-линиям, не зависят от k_-^m и их можно вынести из-под интеграла по $\{k_-^m\}$ в выражении (I.17). Учитывая, что в первичных конфигурациях есть интегрирование только по k^m, но не по q^n, находим, что

$$F_j^{\text{перв}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\text{æ}\to 0}\int \prod_m dk_+^m \frac{\tilde{f}'(k^m,p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + i\text{æ})} \times$$
$$\times \int\limits_{\tilde{V}_\varepsilon} \prod_m dk_-^m \frac{\tilde{f}''(k^m)}{\prod_k (2Q_+^k Q_-^k - M_k^2 + i\text{æ})}, \qquad \text{(I.30)}$$

где $\tilde{V}_\varepsilon$ – область размером порядка ε. Сделаем преобразования (I.20) и (I.24). При этом для знаменателя П-линии будет

$$\frac{1}{2(\frac{1}{\varepsilon}\sum k_+ + \sum p_+)(\sum p_-) - M^2 + i\text{æ}} \to \frac{\varepsilon}{2(\sum k_+)(\sum p_-)}. \quad (I.31)$$

Здесь слагаемыми порядка ε в знаменателе пренебрегаем, так как особенность при $k_+^m = 0$ интегрируема при указанных условиях на α, а при $\sigma = 0$ все можно вычислять в нулевом порядке по ε. Таким образом, вся зависимость от внешних импульсов (причем не только продольных, но и поперечных) соберется в легко получаемый общий множитель. А отсюда следует, что возможных логарифмических по ε поправок нет. Действительно, такая поправка должна содержать выражение $\ln(\varepsilon/u)$, и в силу лоренц-инвариантности в пространстве k_+, k_- (которая всегда предполагается) величина u должна вести себя как "$-$"-компонента вектора, а таких выражений нет; им могла бы быть только компонента внешнего импульса, но зависимость от нее уже фиксирована.

Применение изложенного метода построения гамильтониана к конкретным теориям должно происходить следующим образом. Находится способ полной УФ регуляризации теории, удовлетворяющий также условиям (I.3). Затем на основе формулы (I.29) получается общий вид (во всех порядках теории возмущений) ненулевых первичных и вторичных конфигураций и находится их зависимость от внешних импульсов (в благоприятном случае вторичных конфигураций нет, а зависимость первичных от внешних импульсов дается простым применением формулы (I.31)). Полученные выражения добавляются, с неизвестными коэффициентами, к подвергнутому УФ и "светоподобной" регуляризации каноническому гамильтониану в к. с. ф. в качестве исправляющих контрчленов. При некоторых, неизвестных заранее, значениях этих коэффициентов полученный гамильтониан будет в пределе $\varepsilon \to 0$ пертурбативно эквивалентен ковариантной теории.

Приложение 1

Утверждение 1. Если выполнены условия (I.3), то, при фиксированных внешних импульсах p^s и при $p^s_- \neq 0\ \forall s$, верно равенство

$$\lim_{\beta\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\int\prod_k dq^k_+\int\limits_{V_\varepsilon}\prod_k dq^k_-\frac{\tilde f(Q^i,p^s)e^{-\gamma\sum_i {Q^i_+}^2-\beta\sum_i {Q^i_-}^2}}{\prod_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2+i\ae)}=$$

$$=\int\prod_k dq^k_+\int\limits_{V_\varepsilon\cap B_L}\prod_k dq^k_-\frac{\tilde f(Q^i,p^s)}{\prod_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2+i\ae)},\qquad\text{(I.32)}$$

причем входящие сюда выражения существуют и интеграл по $\{q^k_+\}$ в правой части сходится абсолютно. Считается, что импульсы линий Q^i выражены через петлевые импульсы q^k; V_ε – область, соответствующая наличию полных линий (интегрирование по импульсу Q^i_- которых до снятия δ-функций ведется в области $(-\infty,\infty)$), линий 1-ого рода (интегрирование в области $(-\varepsilon,\varepsilon)$) и линий 2-ого рода (интегрирование в области $(-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\infty)$); B_L – шар радиуса L, где $L\geq S\max\limits_s|p^s_-|$, S – число, зависящее от структуры диаграммы.

Докажем утверждение. Для каждой линии 1-ого рода в (I.32) проведем разбиение

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}dQ^i_- = \left[\int dQ^i_- + (-1)\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}dQ^i_- + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}dQ^i_-\right)\right].\qquad\text{(I.33)}$$

Тогда обе части уравнения (I.32) превратятся в сумму выражений такого же вида, в которых, однако, область V_ε соответствует наличию только полных линий и линий 2-ого рода. Ясно, что доказав утверждение для такого V_ε (что и будет сделано), мы докажем и исходное утверждение.

Пусть $\tilde B$ – область, такая, что поверхности, на которых $Q^i_-=0$, не являются касательными к границе $\tilde B$. Докажем сначала, что в выражении

$$\int\prod_k dq^k_+\int\limits_{V_\varepsilon\cap\tilde B}\prod_k dq^k_-\frac{\tilde f(Q^i,p^s)\,e^{-\beta\sum_i {Q^i_-}^2}}{\prod_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2+i\ae)}\qquad\text{(I.34)}$$

интеграл по $\{q_+^k\}$ сходится абсолютно (интеграл по $\{q_-^k\}$ здесь конечен, так как $æ > 0$, $\beta > 0$). Это становится очевидным (с учетом условий (I.3) и того факта, что в линиях 2-ого рода импульс Q_-^i отделен от нуля), если можно деформировать контуры интегрирования по $\{q_-^k\}$ так, чтобы импульсы Q_-^i полных линий были отделены от нуля на конечную величину (в пределах области $V_\varepsilon \cap \tilde{B}$). В этом случае можно повторить известные рассуждения Вайнберга [32]. Помешать деформации может или зажимание контура, или попадание точки $Q_-^i = 0$ на границу интегрирования.

Исследуем первый вариант. Разобьем область интегрирования по q_+^k на секторы так, чтобы в пределах одного сектора импульсы всех полных линий Q_+^i имели постоянный знак. Рассмотрим один сектор. Возьмем набор полных линий, у которых Q_-^i могут одновременно обращаться в ноль. Изогнем контуры интегрирования по $\{q_-^k\}$ в окрестности точки, где Q_-^i из данного набора одновременно обращаются в ноль, так, чтобы эти контуры прошли через значения $Q_-^i = iB^i$. Пусть B^i таковы, что $B^i Q_+^i \geq 0$ для линий из набора (при Q_+^i из рассматриваемого сектора). Легко проверить, что такое изгибание можно выполнить (так как изгибаются контуры по q_-^k, а Q_-^i выражаются через q_-^k, то достаточно проверить, что существуют b^k, через которые нужные B^i выражаются так же, т. е. что B^i удовлетворяют законам сохранения). При указанном изгибании, достаточно малом и по величине отклонения, и по размеру области, где это отклонение происходит, контуры не будут пересекать полюсов, так как для знаменателя каждой линии из рассматриваемого набора

$$\left(2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + iæ\right) \to \left(2Q_+^i \left(Q_-^i + iB^i\right) - M_i^2 + iæ\right), \qquad Q_+^i B^i \geq 0, \tag{I.35}$$

а для остальных знаменателей изгибание происходит в области, отделенной от точки, где их $Q_-^i = 0$. Повторяя рассуждения для всех наборов, видим, что зажимания контура нет.

Второй вариант исключается указанным выше условием на $\tilde{B}$. Чтобы это увидеть нужно ввести такие координаты ξ^α в q^k-пространстве, что граница области $V_\varepsilon \cap \tilde{B}$ будет определяться уравнением $\xi^1 = a = const$, и провести рассуждения, аналогичные изложенным выше, для координат ξ^α с $\alpha \geq 2$. Чтобы это было возможным, необходима гладкость границы области $V_\varepsilon \cap \tilde{B}$ в точках, где Q^i_- полных линий из набора обращаются в ноль. Если это изначально не так, нужно несколько модифицировать соответствующим образом определение области V_ε, что соответствует изменению способа разбиения искомой разницы на конфигурации.

После изгибания контуров интеграл (I.34) сходится абсолютно по q^k_+, q^k_-, если интегрирование по q^k_+ ведется в пределах рассматриваемого сектора. Заметив, что результат внутреннего интегрирования в (I.34) не зависит от проводимого изгибания, складываем интегралы по всем секторам и заключаем, что абсолютная сходимость по $\{q^k_+\}$ в (I.34) имеет место.

Теперь докажем, что, если $\tilde{B}$ – достаточно малая конечная окрестность точки $\{\tilde{q}^k_-\}$, лежащей вне шара B_L, то выражение (I.34) равно нулю. Рассмотрим импульс одной линии Q^i_-. Проследим за тем, как он течет по диаграмме: он может разветвляться, может сливаться с другими импульсами. Ясно, что возможны две ситуации: либо он весь вытечет через внешние линии, либо после, может быть, долгого блуждания какая-то его часть $\tilde{Q}_-$ сделает полный круг. Первая ситуация будет возможна только если

$$|Q^i_-| \leq \sum_r |p^r_-|, \tag{I.36}$$

где суммируются все вытекающие из диаграммы (но не втекающие в нее) внешние импульсы. Очевидно, что можно выбрать S так, чтобы при $\{q^k_-\}$ из $\tilde{B}$ существовала линия, импульс которой нарушает указанное условие. Вторая ситуация, как легко проверить, приводит к существованию петли, для импульсов линий которой $Q^i_- > \tilde{Q}_-$, причем положительное направление импульсов – вдоль петли. Тогда интеграл по q^k_+ указанной петли можно пронести сквозь интегралы по $\{q^k_-\}$ (так как он сходится абсолютно и равномерно по всем q_-^k) и взять по вычетам. Так как для линий рассмотренной петли Q_-^i отделены от нуля и знакоопределены, то результат равен нулю. Это имеет простой физический смысл. Если перейти к стационарной нековариантной теории возмущений, то окажется, что бывают кванты только с положительными Q_-. При этом внешние частицы с положительным p_- влетающие, а с отрицательным p_- – вылетающие. Тогда из закона сохранения импульса следует условие (I.36).

Из описанных областей $\tilde{B}$ можно построить все пространство вне B_L (на бесконечности все хорошо сходится из-за наличия множителя $\exp(-\beta \sum_i {Q_-^i}^2)$). Значит в левой части уравнения (I.32) можно заменить область интегрирования V_ε на $V_\varepsilon \cap B_L$, внести предел по γ под знак интеграла по $\{q_+^k\}$ из-за его абсолютной сходимости и внести предел по β из-за ограниченности области интегрирования по $\{q_-^k\}$, после чего получится правая часть. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Если V_ε соответствует наличию только линий 2-ого рода, то при тех же условиях, что в утверждении 1, верно равенство

$$\int\limits_{V_\varepsilon} \prod_k dq_-^k \int \prod_k dq_+^k \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + i\text{æ})} =$$

$$= \int \prod_k dq_+^k \int\limits_{V_\varepsilon \cap B_L} \prod_k dq_-^k \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + i\text{æ})}. \qquad \text{(I.37)}$$

Доказывается это утверждение по аналогии со второй частью доказательства утверждения 1.

Приложение 2

Утверждение. Если выполнены условия (I.3), то в выражении (I.10) пределы по γ и β можно пронести (поочередно) через знак интеграла по $\{\alpha_i\}$, а затем через $\tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$.

Для доказательства определим векторы

$$\{q_+^1, q_-^1, \ldots, q_+^l, q_-^l\} \equiv S, \quad \{Q_+^1, Q_-^1, \ldots, Q_+^n, Q_-^n\} \equiv \mu S + P,$$

$$\{y_1^+, y_1^-, \dots, y_n^+, y_n^-\} \equiv Y, \tag{I.38}$$

где вектор P построен только из внешних импульсов, а μ – матрица размера $l \times n$ ранга l, причем $\mu_{2k-1}^{2i} = \mu_{2k}^{2i-1} = 0$, $\mu_{2k}^{2i} = \mu_{2k-1}^{2i-1}$. Далее введем обозначения:

$$\tilde{\Lambda}_i = \begin{pmatrix} \gamma & -i\alpha_i \\ -i\alpha_i & \beta \end{pmatrix}, \quad \Lambda = diag\{\tilde{\Lambda}_1, \dots, \tilde{\Lambda}_n\}, \quad A = \mu^t \Lambda \mu,$$

$$B = \mu^t \Lambda P - \frac{1}{2} i \mu^t Y, \quad C = -P^t \Lambda P + iY^t P - i \sum_i \alpha_i M_i^2. \tag{I.39}$$

Тогда из формулы (I.11) следует, что

$$\hat{\varphi}(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta) = (-i)^n \tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \int d^{2l}S \; e^{-S^t AS - 2B^t S + C}\Big|_{y_i=0} =$$

$$= (-i)^n \tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) e^{B^t A^{-1} B + C} \frac{\pi^l}{\sqrt{\det A}}\Big|_{y_i=0}. \tag{I.40}$$

Функция $\tilde{f}$ – полином; будем отдельно рассматривать каждое его слагаемое. С точностью до множителя оно имеет вид $\left(N_{i_1}\frac{\partial}{\partial y_{i_1}}\right) \dots \left(N_{i_v}\frac{\partial}{\partial y_{i_v}}\right)$, где N_{i_j} – постоянные векторы. Эти производные действуют на C и B. При действии на C появляется постоянный множитель $iN^t P$, а при действии на B – $-(1/2)iN^t \mu A^{-1} B$ или $-(1/4)N_1^t \mu A^{-1} \mu^t N_2$ (последнее есть результат действия двух производных).

Надо отдельно доказать корректность трех процедур: I) внесения под интеграл предела по γ при фиксированном $\beta > 0$; II) внесения предела по β при $\gamma = 0$; III) внесения пределов по γ и β под знаки дифференцирования по Y. В случаях I и II нужно получить оценки

$$|\hat{\varphi}(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta)| \le \varphi'(\alpha_i, p^s, \beta), \tag{I.41}$$

$$|\hat{\varphi}(\alpha_i, p^s, 0, \beta)| \le \varphi''(\alpha_i, p^s), \tag{I.42}$$

где φ' и φ'' – функции, интегрируемые (для φ' при $\beta > 0$) в любой конечной области по α_i при $\alpha_i \ge 0$. Тогда для случая I будет

$$|\hat{\varphi}(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta)\; e^{-æ\sum_i \alpha_i}| \le \varphi'(\alpha_i, p^s, \beta)\; e^{-æ\sum_i \alpha_i}, \tag{I.43}$$

т. е. возникнет оценка интегрируемой функцией, а, значит предел по γ можно вносить. Аналогично для случая II. Из формулы (I.40) видно, что функция $\hat{\varphi}$ может быть сингулярна только при обращении в ноль собственных чисел λ_j матрицы A. Оценивая снизу эти собственные числа, докажем, что при выполнении условия (I.3) оценки (I.41), (I.42) имеют место.

Будем анализировать окрестности точек, в которых $\lambda_j = 0$, для всевозможных комбинаций λ_j. Заметим, что множество α_i, при которых A имеет совпадающие собственные числа (а значит может быть недиагонализуема), есть множество меры ноль, и на значении интеграла не сказывается. Поэтому все оценки будем проводить, считая, что все собственные числа матрицы A разные. Из формулы (I.39) видно, что $A^t = A$. Тогда

$$AX_j = \lambda_j X_j, \quad X_j^t X_k = \delta_{jk}, \quad A = \sum_j \lambda_j X_j X_j^t. \tag{I.44}$$

Обозначим $Z_j = \mu X_j$, $z_j^{(r)}$ и $x_j^{(r)}$ – компоненты, соответственно, Z_j и X_j; $r = 1, \ldots, 2n$. Введем разложение

$$\begin{gathered} X = \xi X_+ + \zeta X_-, \quad x_+^{(2k)} = 0, \quad x_-^{(2k-1)} = 0, \\ \bar{X}_+^t X_+ = 1, \quad \bar{X}_-^t X_- = 1, \quad \bar{X}_+^t X_- = 0, \\ |\xi|^2 + |\zeta|^2 \geq 1, \quad |\xi|, |\zeta| \leq B, \quad Z_\pm = \mu X_\pm. \end{gathered} \tag{I.45}$$

Здесь и далее опускается индекс j, черта над величиной означает комплексное сопряжение, а буква B всегда обозначает положительные константы (вообще говоря, каждый раз разные). Тогда

$$\lambda\xi = \bar{X}_+^t A X = \xi \bar{Z}_+^t \Lambda Z_+ + \zeta \bar{Z}_+^t \Lambda Z_- = \xi\gamma c - i\zeta \sum_{i=1}^{l} \tilde{c}_i \alpha_i$$

$$\text{где} \quad c = \sum_{i=1}^{l} \left| z_+^{(2i-1)} \right|^2 > B, \quad \tilde{c}_i = \bar{z}_+^{(2i-1)} z_-^{(2i)}; \tag{I.46}$$

$$\lambda\zeta = \bar{X}_-^t A X = \xi \bar{Z}_-^t \Lambda Z_+ + \zeta \bar{Z}_-^t \Lambda Z_- = -i\xi \sum_{i=1}^{l} \bar{\tilde{c}}_i \alpha_i + \zeta\beta\hat{c},$$

$$\text{где} \quad \hat{c} = \sum_{i=1}^{l} \left| z_-^{(2i)} \right|^2 > B. \tag{I.47}$$

Отсюда находим

$$\lambda_{1,2} = \frac{\gamma c + \beta \hat{c}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\gamma c - \beta \hat{c}}{2} \right)^2 - |b|^2}, \qquad b \equiv \sum_{i=1}^{l} \tilde{c}_i \alpha_i. \tag{I.48}$$

Теперь введем векторы $\hat{X}_+$, $\hat{X}_-$:

$$\hat{X}_+^{(r)} = X_+^{(r-1)}, \quad \hat{X}_+^{(1)} = 0, \quad \hat{X}_-^{(r)} = X_-^{(r+1)}, \quad \hat{X}_-^{(2l)} = 0. \tag{I.49}$$

Тогда

$$\lambda \zeta \left(\bar{\hat{X}}_+^t X_- \right) = \bar{\hat{X}}_+^t A X = -i \xi \sum_{i=1}^{l} c_i \alpha_i + \zeta \beta \left(\bar{\hat{Z}}_+^t Z_- \right), \tag{I.50}$$

$$\lambda \xi \left(\bar{\hat{X}}_-^t X_+ \right) = \bar{\hat{X}}_-^t A X = \xi \gamma \left(\bar{\hat{Z}}_-^t Z_+ \right) - i \zeta \sum_{i=1}^{l} \hat{c}_i \alpha_i, \tag{I.51}$$

где $\hat{c}_i = \left| z_-^{(2i)} \right|^2, \quad c_i = \left| z_+^{(2i-1)} \right|^2$. Эти соотношения понадобятся ниже.

Рассмотрим уравнение (I.48). Будем оценивать величину λ снизу отдельно для случаев I и II (см. перед формулой (I.41)). Пусть λ_1 соответствует знаку "$-$" в уравнении (I.48), а λ_2 – знаку "$+$".

I) β – фиксировано $\Rightarrow$ λ_2 отделено от нуля. Если $|b| \geq |(\gamma c - \beta \hat{c})/2|$, то $|\lambda_1| \geq (\beta \hat{c})/2$, т. е. λ_1 отделено от нуля. Пусть $|b| \leq |(\gamma c - \beta \hat{c})/2|$, тогда, применяя очевидную оценку $\sqrt{u^2 - v^2} \leq \sqrt{u^2} - v^2/\sqrt{u^2}$, получаем:

$$\lambda_1 \geq \frac{\gamma c + \beta \hat{c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma c + \beta \hat{c}}{2} \right)^2 - |b|^2} \geq$$

$$\geq \frac{2|b|^2}{\gamma c + \beta \hat{c}} \geq \frac{|b|^2}{\beta \hat{c}} \geq B|b|^2. \tag{I.52}$$

С другой стороны

$$\lambda_1 \geq \frac{\gamma c + \beta \hat{c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma c + \beta \hat{c}}{2} \right)^2} = \gamma c, \tag{I.53}$$

что в итоге дает

$$\lambda_1 \geq B_1 |b|^2 + B_2 \gamma. \tag{I.54}$$

II) Теперь $\gamma = 0$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \hat{c}}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\beta \hat{c}}{2}\right)^2 - |b|^2}. \tag{I.55}$$

Если $|b| \geq (\beta \hat{c})/2$, то

$$|\lambda_{1,2}| = |b|. \tag{I.56}$$

Если $|b| \leq (\beta \hat{c})/2$, то (аналогично формуле (I.52))

$$\lambda_2 \geq \frac{\beta \hat{c}}{2}, \quad \lambda_1 \geq \frac{2|b|^2}{\beta \hat{c}}. \tag{I.57}$$

Еще полезно сделать оценку на ζ. Пусть $\zeta_{1,2}$, $\xi_{1,2}$ соответствуют $\lambda_{1,2}$. Тогда из формул (I.47), (I.48), с использованием (I.55), будет

$$\zeta_1 = \frac{i\xi \bar{b}}{\beta \hat{c} - \lambda} \quad \Rightarrow \quad \text{I) } |\zeta_1| \leq B|b|, \quad \text{II) } |\zeta_1| \leq B\frac{|b|}{\beta}. \tag{I.58}$$

Теперь можно перейти к оценке выражений, получающихся при дифференцировании в формуле (I.40) (см. после нее). Пусть $N_+^{(2i)} = 0$, $N_-^{(2i-1)} = 0$. Удобно отдельно оценивать каждое слагаемое одного из следующих выражений: 1) $N_{1+}^t \mu A^{-1} \mu^t N_{2+}$; 2) $N_{1-}^t \mu A^{-1} \mu^t N_{2-}$; 3) $N_{1+}^t \mu A^{-1} \mu^t N_{2-}$; 4) $N_{1+}^t \mu A^{-1} \mu^t \Lambda P$; 5) $N_{1-}^t \mu A^{-1} \mu^t \Lambda P$; 6) $P^t \Lambda \mu A^{-1} \mu^t \Lambda P$. Последнее выражение стоит в формуле (I.40) в показателе экспоненты после подстановки $y_i = 0$, а остальные могут появиться в виде множителей. Используем формулы (I.44), (I.45), (I.52)–(I.58). Рассмотрим сначала выражения 1),2),3).

$$1) \qquad N_{1+}^t \mu A^{-1} \mu^t N_{2+} = \sum_{j=1}^{2l} \left(N_{1+}^t \mu X_j\right) \left(N_{2+}^t \mu X_j\right) \lambda_j^{-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2l} \left(N_{1+}^t \mu X_{j+}\right) \left(N_{2+}^t \mu X_{j+}\right) \xi_j^2 \lambda_j^{-1} \equiv \sum_{j=1}^{2l} H_j^{(1)}, \tag{I.59}$$

$$\text{I)}\quad \left|H^{(1)}\right| \le \frac{B}{|b|^2}, \tag{I.60}$$

$$\text{II)}\quad \left|H^{(1)}\right| \le \begin{cases} \dfrac{B\beta}{|b|^2}, & |b| \le \dfrac{\beta\hat{c}}{2}, \\ \dfrac{B}{|b|}, & |b| \ge \dfrac{\beta\hat{c}}{2}, \end{cases} \tag{I.61}$$

Так как все оценки проводятся отдельно (но аналогичным образом) для каждого собственного числа (точнее для пары собственных чисел $\lambda_{1,2}$) и индекс j, указывающий номер этого собственного числа опускается (см. после формулы (I.45)), то он опускается и у величины $H^{(1)}$. То же самое происходит в дальнейшем.

$$\text{2)}\quad N_{1-}^t \mu A^{-1} \mu^t N_{2-} =$$
$$= \sum_{j=1}^{2l} \left(N_{1-}^t \mu X_{j-}\right)\left(N_{2-}^t \mu X_{j-}\right) \zeta_j^2 \lambda_j^{-1} \equiv \sum_{j=1}^{2l} H_j^{(2)}, \tag{I.62}$$

$$\text{I)}\quad \left|H^{(2)}\right| \le B, \tag{I.63}$$

$$\text{II)}\quad \left|H^{(2)}\right| \le \begin{cases} \dfrac{B}{\beta}, & |b| \le \dfrac{\beta\hat{c}}{2}, \\ \dfrac{B}{|b|}, & |b| \ge \dfrac{\beta\hat{c}}{2}, \end{cases} \tag{I.64}$$

$$\text{3)}\quad N_{1+}^t \mu A^{-1} \mu^t N_{2-} =$$
$$= \sum_{j=1}^{2l} \left(N_{1+}^t \mu X_{j+}\right)\left(N_{2-}^t \mu X_{j-}\right) \xi_j \zeta_j \lambda_j^{-1} \equiv \sum_{j=1}^{2l} H_j^{(3)}, \tag{I.65}$$

$$\text{I, II)}\quad \left|H^{(3)}\right| \le \frac{B}{|b|}. \tag{I.66}$$

Для дальнейшего полезно получить следующие оценки.

Случай I.
Из формул (I.50), (I.58):

$$\sum_{i=1}^{l} \left|\xi_1 z_+^{(2i-1)}\right|^2 \alpha_i =$$
$$= \left|\lambda\xi_1\zeta_1 \left(\bar{\hat{X}}_+^t X_-\right) - \xi_1\zeta_1\beta \left(\bar{\hat{Z}}_+^t Z_-\right)\right| \le B|b|. \qquad \text{(I.67)}$$

Случай II.
Если $|b| \ge (\beta\hat{c})/2$, то из формул (I.50), (I.56):

$$|\lambda_{1,2}| = |b| \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{l} \left|\xi_{1,2} z_+^{(2i-1)}\right|^2 \alpha_i \le B|b|. \qquad \text{(I.68)}$$

Если $|b| \le (\beta\hat{c})/2$, то из формул (I.46), (I.50), (I.55):

$$|\lambda_2| \le \beta\hat{c}, \quad |\lambda_2| \ge \frac{1}{2}\beta\hat{c}, \quad |\xi_2| = \frac{|\zeta_2||b|}{|\lambda_2|} \le B\frac{|b|}{\beta} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \left|\xi_2 z_+^{(2i-1)}\right|^2 \alpha_i \le B|b|, \qquad \text{(I.69)}$$

а из формул (I.50), (I.55), (I.58):

$$|\lambda_1| \le \beta\hat{c}, \quad |\zeta_1| \le B\frac{|b|}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{l} \left|\xi_1 z_+^{(2i-1)}\right|^2 \alpha_i \le B|b|. \qquad \text{(I.70)}$$

Далее, из формул (I.46), (I.51)

$$\frac{\lambda\xi}{\zeta} = -ib, \quad \sum_{i=1}^{l} \left|\zeta z_-^{(2i)}\right|^2 \alpha_i = \left|\lambda\xi\zeta \left(\bar{\hat{X}}_-^t X_+\right)\right| \le B|b|. \qquad \text{(I.71)}$$

Теперь, учитывая формулы (I.45) и (I.58), видим, что в случае I для λ_1, а в случае II и для λ_1, и для λ_2 (напомним, что в случае I λ_2 отделено от нуля, см. перед выражением (I.52)) формулы (I.67)–(I.71) можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{l} \left(\left|z^{(2i-1)}\right|^2 + \left|z^{(2i)}\right|^2\right) \alpha_i \le B|b|. \qquad \text{(I.72)}$$

Как говорилось выше, нужно исследовать окрестности таких α_i, при которых некоторый набор λ обращается в ноль. Если $\lambda = 0$, то $|b| = 0$ (см. формулы (I.52), (I.56), (I.57)), а значит (из формулы (I.72))

$$\sum_{i=1}^{l} \left(\left| z^{(2i-1)} \right|^2 + \left| z^{(2i)} \right|^2 \right) \alpha_i = 0 \tag{I.73}$$

(такое уравнение нужно написать для каждого λ из упомянутого набора; напомним, что Z определяется через собственный вектор, а значит сопоставляется каждому собственному числу λ). Пусть мы нашли такие α_i, что λ из упомянутого набора обратились в ноль, а, следовательно, условие (I.73) для каждого λ выполнено. Введем индекс i', пробегающий не весь ряд значений, а только такие, что

$$\left(\left| z^{(2i'-1)} \right|^2 + \left| z^{(2i')} \right|^2 \right) \geq g \tag{I.74}$$

для вектора Z, соответствующего хотя бы одному λ из набора, где g – константа, и это условие остается верным при малых изменениях α_i, γ и β вплоть до нуля. Тогда из условия (I.73) следует, что все λ из набора обращаются в ноль только при

$$\alpha_{i'} = 0 \quad \forall i'. \tag{I.75}$$

Пусть i'' пробегает значения, не вошедшие в область значений i'. Введем величины

$$r = \sum_{i'} \alpha_{i'}, \quad \alpha_{i'} = r u_{i'}, \quad \sum_{i'} u_{i'} = 1. \tag{I.76}$$

Тогда

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{l} \left(\left| z^{(2i-1)} \right|^2 + \left| z^{(2i)} \right|^2 \right) \alpha_i \geq \\ \geq \sum_{i'} \left(\left| z^{(2i'-1)} \right|^2 + \left| z^{(2i')} \right|^2 \right) \alpha_{i'} \geq g r. \end{gathered} \tag{I.77}$$

Теперь, используя (I.72), получаем

$$|b| \geq B r. \tag{I.78}$$

Эта оценка будет полезна ниже.

Из определения i'' следует, что

$$z^{(2i''-1)}, z^{(2i'')} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad G^t X \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{I.79}$$

где G –постоянный вектор. Докажем, что собственный вектор X зависит от r, γ и β дифференцируемым образом при $\lambda \to 0$. Матричные элементы матрицы A линейны по r, γ и β, следовательно, надо доказывать дифференцируемость зависимости X от произвольного матричного элемента $\tilde{\eta}$. Как и раньше считаем, что все собственные числа матрицы A разные. Легко заметить, что

$$\begin{gathered} X^+X = 1, \quad X^+ \equiv \bar{X}^t, \quad \tilde{\eta} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \eta_0, \quad X \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} X_0, \\ \tilde{\eta} = \eta_0 + \eta, \quad X = X_0 + R\eta^w, \quad \lambda = \hat{\lambda}\eta^v, \quad v, w > 0. \end{gathered} \tag{I.80}$$

Отсюда получается $R^+X_0 = 0$. Очевидно, что

$$R^+AX = \lambda R^+X \quad \Rightarrow \quad R^+AX_0 + R^+AR\eta^w = \hat{\lambda}\eta^v R^+R\eta^w. \tag{I.81}$$

Так как $R^+R \neq 0$, то либо v целое, а w любое, либо $v + w$ целое, а $v - w$ любое. С другой стороны

$$X_0^+AX = \lambda X_0^+X \quad \Rightarrow \quad X_0^+AX_0 + X_0^+AR\eta^w = \hat{\lambda}\eta^v X_0^+X_0. \tag{I.82}$$

Так как $X_0^+X_0 \neq 0$, то либо v целое, а w любое, либо $v - w$ целое, а $v + w$ любое. Если v целое, т. е. λ дифференцируемо по $\tilde{\eta}$, то X дифференцируемо по $\tilde{\eta}$, а значит, w целое. Отсюда, с использованием полученных альтернатив, получается: если w нецелое, то v нецелое, значит, $v + w$, $v - w$ целые, значит, $2v$, $2w$ целые. Рассмотрим матрицу A^2. Очевидно, что

$$A^2X = \lambda^2 X, \quad \lambda^2 = \hat{\lambda}^2\eta^{2v}, \tag{I.83}$$

значит, λ^2 дифференцируемо по $\tilde{\eta}$, значит, X дифференцируемо по $\tilde{\eta}$, но w нецелое, следовательно, получилось противоречие, если только не существуют λ_1, λ_2 такие, что $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$. Таким образом, если потребовать не только чтобы все λ были разными, но и все λ^2 тоже, то зависимость X от r, γ и

β будет дифференцируемой. Это расширенное требование есть, как и раньше (см. перед формулой (I.44)), исключение множества меры ноль, что допустимо. Из формулы (I.78) следует, что r дифференцируемо по $|b|$, значит X дифференцируемо по $|b|$. Тогда из формулы (I.79) получается

$$\left|z^{(2i'')}\right|, \left|z^{(2i''-1)}\right| \leq B|b|. \tag{I.84}$$

Используя этот результат, можно сделать оценку выражения $(Z^t \Lambda P)$, которой воспользуемся ниже. Используем формулы (I.45), (I.58), (I.76), (I.78), (I.84)

$$\begin{array}{lll}
\text{I)} & \text{для } \lambda_1 & (Z^t \Lambda P) \leq B_1|b| + B_2\gamma, \\
\text{II)} & \text{для } \lambda_1 & (Z^t \Lambda P) \leq B_1|b|, \\
 & \text{для } \lambda_2 & (Z^t \Lambda P) \leq B_1|b| + B_2\beta.
\end{array} \tag{I.85}$$

Теперь можно вернуться к оценкам выражений 4), 5), 6) (см. перед формулой (I.59). Используем формулы (I.45), (I.54), (I.56)–(I.58), (I.85)

$$4) \quad N_{1+}^t \mu A^{-1} \mu^t \Lambda P = \\
= \sum_{j=1}^{2l} \left(N_{1+}^t \mu X_{j+}\right) \left(Z_j^t \Lambda P\right) \xi_j \lambda_j^{-1} \equiv \sum_{j=1}^{2l} H_j^{(4)}, \tag{I.86}$$

$$\text{I)} \quad \left|H^{(4)}\right| \leq \frac{B_1|b| + B_2\gamma}{B_3|b|^2 + B_4\gamma} \leq \frac{B}{|b|}, \tag{I.87}$$

$$\text{II)} \quad \left|H^{(4)}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{B\beta}{|b|}, & |b| \leq \dfrac{\beta\hat{c}}{2}, \\ B, & |b| \geq \dfrac{\beta\hat{c}}{2}, \end{cases} \tag{I.88}$$

$$5) \quad N_{1-}^t \mu A^{-1} \mu^t \Lambda P = \\
= \sum_{j=1}^{2l} \left(N_{1-}^t \mu X_{j-}\right) \left(Z_j^t \Lambda P\right) \zeta_j \lambda_j^{-1} \equiv \sum_{j=1}^{2l} H_j^{(5)}, \tag{I.89}$$

$$\text{I, II)} \quad \left|H^{(5)}\right| \leq B. \tag{I.90}$$

6) $$P^t\Lambda\mu A^{-1}\mu^t\Lambda P=\sum_{j=1}^{2l}\left(Z_j^t\Lambda P\right)^2\lambda_j^{-1}\equiv\sum_{j=1}^{2l}H_j^{(6)},\qquad\text{(I.91)}$$

I, II) $$\left|H^{(6)}\right|\le B.\qquad\text{(I.92)}$$

Еще заметим, что согласно (I.84) в выражениях (I.59), (I.62), (I.65), (I.86), (I.89) и (I.91) можно оценить через $|b|$ величину $|N_+^t\mu X_{r+}|$, если $N_+^{(2i'-1)}=0\ \forall i'$, и величину $|N_-^t\mu X_{r-}|$, если $N_-^{(2i')}=0\ \forall i'$ (определение i' см. после формулы (I.73)). Это дает дополнительные множители $|b|$, по сравнению со сделанными оценками.

С учетом этого замечания, анализ оценок (I.60), (I.61), (I.63), (I.64)–(I.66), (I.87), (I.88), (I.90) показывает, что все слагаемые множителей, возникающих при дифференцировании в формуле (I.40) можно оценить как

$$\begin{aligned}&\text{I)}\ |b|^{-s_+},\quad \text{II)}\ |b|^{-\max(s_+,[s_\parallel/2])}\quad\Rightarrow\\&\Rightarrow\quad\text{I)}\ r^{-s_+},\quad\text{II)}\ r^{-\max(s_+,[s_\parallel/2])}.\end{aligned}\qquad\text{(I.93)}$$

Здесь была использована формула (I.78). Квадратные скобки обозначают выделение целой части числа; s_+ – число дифференцирований $\frac{\partial}{\partial y_+}$ таких, что для их N_+ существуют $N_+^{(2i'-1)}\neq 0$; $s_\parallel$ – суммарное число таких $\frac{\partial}{\partial y_+}$ и $\frac{\partial}{\partial y_-}$, удовлетворяющих аналогичному условию: для их N_- существуют $N_-^{(2i')}\neq 0$.

Оценим теперь величину $\frac{1}{\sqrt{\det A}}$ из формулы (I.40). Пусть число собственных чисел λ, стремящихся к нулю, равно m. Заметим, что из формулы (I.55) получается

$$\lambda_2+\lambda_1=\beta\hat{c},\qquad\text{(I.94)}$$

откуда следует, что для случая II, когда $\beta\to 0$, λ_1 и λ_2 могут стремиться к нулю только одновременно, поэтому, в частности, m обязательно четно. Тогда, используя формулы (I.52), (I.78), получаем

I) $$|\lambda_2|\ge B,\ \ |\lambda_1|\ge B|b|^2\ge\tilde{B}r^2\ \ \Rightarrow\ \ \left|\frac{1}{\sqrt{\det A}}\right|\le Br^{-m}.\qquad\text{(I.95)}$$

Используя формулы (I.56), (I.57), (I.78), получаем

II) если $|b| \geq \dfrac{\beta\hat{c}}{2}$:

$$|\lambda_{1,2}| = |b| \geq Br \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{\det A}}\right| \leq Br^{-m/2},$$

если $|b| \leq \dfrac{\beta\hat{c}}{2}$:

$$\lambda_1 \geq \frac{B|b|^2}{\beta} \geq \frac{\tilde{B}r^2}{\beta},\ \lambda_2 \geq B\beta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{\sqrt{\det A}}\right| \leq Br^{-m/2}. \quad \text{(I.96)}$$

В последней оценке учтено, что λ_1 и λ_2 могут стремиться к нулю только одновременно.

Теперь будем искать, сколько значений пробегает i' (см. определение перед формулой (I.74)). Пусть X^0 и Z^0 – предельные значения при $\lambda, \gamma, \beta \to 0$ (здесь имеются в виду λ из набора) векторов X и Z (напомним, что они связаны соотношением $Z = \mu X$), сопоставленных собственным числам λ из набора; описание набора см. перед формулой (I.73)). Если компоненты вектора Z^0 равны $z^{0(2i-1)}$, $z^{0(2i)}$, то каждому значению индекса i соответствует линия диаграммы (см. формулу (I.38)). Рассмотрим множество линий, соответствующих значениям i'. Индекс i' пробегает такие значения, что существует s, такое что $z_{(s)}^{0(2i')} \neq 0$ или $z_{(s)}^{0(2i'-1)} \neq 0$ (см. определение i' перед формулой (I.74)). Очевидно, что составляющие это множество линии (пусть их $\tilde{l}$ штук, а значит i' пробегает $\tilde{l}$ значений) образуют поддиаграмму (обозначим ее $\tilde{D}$), так как $Z^0 = \mu X^0$. Пусть в ней $\tilde{n}$ петель. Рассмотрим линейную оболочку векторов $Z_{(1)}^0 \dots Z_{(m)}^0$, размерность которой, очевидно, равна m. Ясно, что она является подпространством линейной оболочки всех векторов, соответствующих поддиаграмме $\tilde{D}$, размерность которой равна $2\tilde{n}$ (так как независимо можно задавать q_+ и q_- для каждой петли). Отсюда следует, что $m \leq 2\tilde{n}$. Для случая I, однако, можно сделать более сильную оценку. Действительно, из формулы (I.45) и (I.58) следует, что $X^0 = \xi X_+^0$, а значит $Z^0 = \xi Z_+^0$, т. е. линейная оболочка векторов $Z_{(1)}^0 \dots Z_{(m)}^0$ погружается в подпространство размерности не $2\tilde{n}$, а $\tilde{n}$. Отсюда следует, что для случая I $m \le \tilde{n}$.

Теперь, используя формулы (I.40), (I.93), (I.95), (I.96), можно получить оценку для каждого слагаемого, на которые можно разбить величину $\hat{\varphi}$ (о том, какие слагаемые должны оцениваться отдельно, см. после формулы (I.40) и формулу (I.59)), а значит, получить оценку на $\hat{\varphi}$ в виде некоторой суммы (используем ограниченность показателя экспоненты, следующую из формулы (I.92))

$$\mathrm{I})\ \varphi' = \sum B r^{-s_+ - m}, \quad \mathrm{II})\ \varphi'' = \sum B r^{-\max(s_+, [s_\parallel/2]) - m/2}, \qquad (\mathrm{I}.97)$$

где φ' и φ'' – оценивающие функции из формул (I.41), (I.42). Напомним, что эта оценка работает в окрестности точки в пространстве α_i, в которой некоторый набор собственных чисел λ обращается в ноль (см. перед формулой (I.73)). Теперь докажем, что φ' и φ'' являются интегрируемыми функциями в окрестности этой точки. Из формулы (I.76) следует

$$\prod_{i'} d\alpha_{i'} = r^{\tilde{l}-1} dr \prod_{i'} du_{i'} \delta\Big(\sum_{i'} u_{i'} - 1\Big). \qquad (\mathrm{I}.98)$$

Тогда

$$\int \prod_i d\alpha_i\, \varphi' = \sum B \int \delta\Big(\sum_{i'} u_{i'} - 1\Big) \prod_{i'} du_{i'} \prod_{i''} d\alpha_{i''} r^{\tilde{l}-1-\nu'}\, dr,$$
$$\nu' = s_+ + m. \qquad (\mathrm{I}.99)$$

Для φ'' формула та же, только $\nu'' = \max(s_+, [s_\parallel/2]) + m/2$. Интегрируемость в окрестности точки $r = 0$ имеет место, если

$$\mathrm{I})\ \tilde{l} - s_+ - m > 0, \qquad \mathrm{II})\ \tilde{l} - \max(s_+, [s_\parallel/2]) - m/2 > 0. \quad (\mathrm{I}.100)$$

Пусть $\tilde{s}_+$ – число множителей Q_+, относящихся к поддиаграмме $\tilde{D}$, стоящих в числителе рассматриваемого интеграла Фейнмана. Тогда из определений поддиаграммы $\tilde{D}$ и величины s_+ следует, что $s_+ \le \tilde{s}_+$. Аналогично введем величину $\tilde{s}_\parallel$ – число соответствующих множителей $Q_\parallel$, для которой будет $s_\parallel \le \tilde{s}_\parallel$. Отсюда, с учетом полученной выше оценки на величину m, следует, что условия интегрируемости есть

$$\mathrm{I})\ \tilde{l} - \tilde{s}_+ - \tilde{n} > 0, \qquad \mathrm{II})\ \tilde{l} - \max(\tilde{s}_+, [\tilde{s}_\parallel/2]) - \tilde{n} > 0. \quad (\mathrm{I}.101)$$

Учитывая, что индексы ультрафиолетовой расходимости поддиаграммы D есть

$$\tilde{\omega}_+ = \tilde{n} + \tilde{s}_+ - \tilde{l}, \qquad \tilde{\omega}_\| = 2\tilde{n} + \tilde{s}_\| - 2\tilde{l}, \tag{I.102}$$

эти условия можно переписать как

$$\text{I)}\ \tilde{\omega}_+ < 0, \qquad \text{II)}\ \max(\tilde{\omega}_+, [\tilde{\omega}_\|/2]) < 0, \tag{I.103}$$

что выполняется по условиям доказываемого утверждения.

Таким образом, сделаны необходимые оценки для доказательства корректности процедур I и II (см. перед формулой (I.41)), т. е. внесения пределов по γ и β под знак интеграла по α_i в выражении (I.10). После того как пределы внесены, очевидно, что можно поменять их местами с дифференцированием по Y (т. е. что процедура III корректна), так как это достаточно сделать при $\alpha_i > 0$ (для каждого i), а в этом случае из формулы (I.97) следует, что $\hat{\varphi}$ не сингулярна при любых значениях γ и β вплоть до нуля. Утверждение доказано.

Приложение 3

Опишем кратко и без технических подробностей идею способа нахождения всех ненулевых конфигураций на примере произвольной однопетлевой диаграммы. При вычислении фейнмановского интеграла в лоренцевых координатах он берется по всей плоскости k_+, k_-. А при светоподобном вычислении интеграл берется по плоскости с вырезанными полосками $|k_- - p^i_-| \leq \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots$. Это является следствием "светоподобной" регуляризации – из-за нее протекающий по каждой линии импульс Q должен быть ограничен условием $|Q_-| \leq \varepsilon$, что и дает указанное вырезание полосок. Поэтому, разница между лоренцевым и светоподобным способами вычисления дается суммой интегралов по полоскам.

Оценим интеграл по одной полоске (называемый конфигурацией диаграммы). Сдвинем переменную интегрирования k_- так, чтобы полоска задавалась уравнением $k_- \leq \varepsilon$.

Линию, по которой после сдвига течет импульс k назовем ε-линией, а остальные, по которым текут импульсы с "$-$"-компонентой, отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ величиной порядка "$-$"-компонент внешних импульсов, назовем П-линиями. Далее, сделаем замену переменных интегрирования:

$$k_- \longrightarrow \varepsilon k_-, \qquad k_+ \longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} k_+. \tag{I.104}$$

После замены ширина полоски перестанет зависеть от ε. Элемент объема интегрирования $dk_- dk_+$ и знаменатели пропагаторов ε-линий не изменятся; k_+, стоящий в числителе любого пропагатора будет давать множитель $1/\varepsilon$; k_-, стоящий в числителе пропагатора ε-линии будет давать множитель ε; пропагаторы П-линий изменятся следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{i}{\pi} \frac{1}{2(k_+ + p_+)(k_- + p_-) - m^2 + i0} \longrightarrow \\ \longrightarrow \frac{i}{\pi} \frac{1}{2(\frac{1}{\varepsilon} k_+ + p_+)(\varepsilon k_- + p_-) - m^2 + i0} \underset{\varepsilon \to 0}{\approx} \frac{i}{\pi} \frac{\varepsilon}{2k_+ p_-}, \end{gathered} \tag{I.105}$$

откуда следует, что каждый знаменатель П-линии дает множитель ε. Собрав все получившиеся множители ε, можно узнать, как ведет себя интеграл по полоске в пределе $\varepsilon \to 0$, а значит, определить, является ли конфигурация ненулевой.

Глава II
Гамильтониан в координатах светового фронта для некалибровочной теории поля

Рассмотрим примеры применения изложенного в главе I метода построения гамильтониана на двух некалибровочных моделях. Первая из них – четырехмерная теория с взаимодействием типа Юкавы. Для нее удается построить гамильтониан в к. с. ф. в замкнутом виде с одним дополнительным (неизвестным) коэффициентом. Найденные контрчлены совпадают с предложенными для этой модели в работе [14], но там не было доказано, что не требуется других контрчленов, так как были исследованы во всех порядках теории возмущений только диаграммы собственной энергии, а прочие диаграммы рассматривались лишь в низших порядках с помощью прямого вычисления.

Вторая изучаемая модель – это скалярная теория с неполиномиальным взаимодействием, являющаяся результатом бозонизации двумерной КЭД [18, 19, 20, 21, 22]. Лагранжиан рассматриваемой теории является модифицированным лагранжианом модели синус-гордон. Неполиномиальность взаимодействия, приводящая к появлению в теории возмущений вершин со сколь угодно большим числом линий, делает нетривиальным построение гамильтониана в к. с. ф.

Обычная модель синус-гордон в области параметров, в которой ситуация упрощается из-за отсутствия проблем, связанных с УФ расходимостью (в отличие от рассматриваемого здесь случая), изучалась в работе [33]. Там получено выражение для гамильтониана в к. с. ф. на основе анализа специфических диаграмм, но отсутствует доказательство того, что рассмотрение прочих диаграмм не приводит к появлению дополнительных контрчленов.

Построенный в п. 2 гамильтониан в к. с. ф. порождает теорию возмущений, эквивалентную ковариантной теории возмущений по массе фермиона (которая после бозонизации играет роль константы связи) для КЭД, а значит, его спектр будет совпадать со спектром КЭД. Этот спектр можно искать вне рамок теории возмущений, например, используя метод DLCQ (Discretized Light-Cone Quantization) [34, 35]. Следует отметить, что без использования бозонизации (т. е. в фермионных терминах) строить гамильтониан анализируя теорию возмущений невозможно, так как из-за ИК расходимостей в двумерной КЭД теория возмущений по константе связи не существует.

1. Четырехмерная модель с взаимодействием типа Юкавы

Плотность лагранжиана модели имеет вид

$$L = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - M\right)\psi - g\varphi\bar{\psi}\psi, \qquad (\text{II}.1)$$

где массы бозона m и фермиона M считаются отличными от нуля. Введем УФ регуляризацию по поперечным импульсам $Q_\perp$, модифицировав свободную часть лагранжиана

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) + \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - M\right)\psi \to$$

$$\to -\frac{1}{2}\varphi\left(\partial^2 + m^2\right)\left(1 - \frac{\partial_\perp^2}{\Lambda_\perp^2}\right)\varphi + \bar{\psi}\left(1 - \frac{\partial_\perp^2}{\Lambda_\perp^2}\right)\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - M\right)\psi. \qquad (\text{II}.2)$$

Применяется лоренц-неинвариантная регуляризация (но сохраняющая частичную лоренц-инвариантность в плоскости $\{x^+, x^-\}$), чтобы избежать появления индефинитной метрики в гамильтоновой теории в к. с. ф. Такая метрика возникла бы при использовании регуляризации Паули-Вилларса. В данной модели без этого можно обойтись.

Таким образом, здесь строится теория в к. с. ф., пертурбативно эквивалентная теории в лоренцевых координатах с лоренц-неинвариантной регуляризацией. Эта теория может быть затем уже стандартным путем сделана Лоренц-инвариантной путем добавления нужных контрчленов. После регуляризации пропагаторы примут вид

$$\frac{i}{\left(Q^2 - m^2 + i0\right)\left(1 + \frac{Q_\perp^2}{\Lambda_\perp^2}\right)} \qquad (\text{II}.3)$$

для бозона и

$$i\frac{\gamma^\mu Q_\mu + M}{(Q^2 - M^2 + i0)\left(1 + \frac{Q_\perp^2}{\Lambda_\perp^2}\right)} \tag{II.4}$$

для фермиона. Использованная УФ регуляризация не является полной, так как остается одна расходящаяся диаграмма, изображенная на рис. 8, *а*.

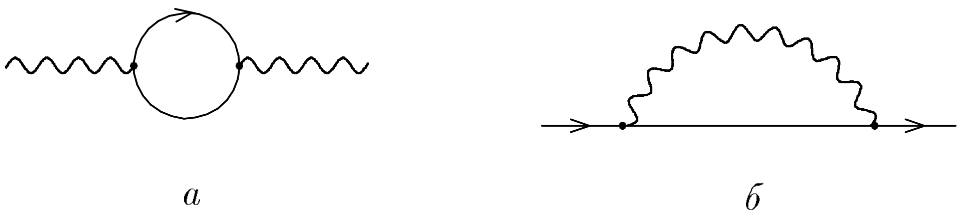

Рис. 8. Диаграммы модели Юкавы, требующие специального рассмотрения.

Она логарифмически расходится при интегрировании по q_+, q_-. Поступим с ней следующим образом. Введем дополнительную промежуточную УФ регуляризацию с помощью обрезания по Q_3 для ковариантной теории возмущений и по Q_- для гамильтониана в к. с. ф. После этого выделим в подынтегральном выражении рассматриваемой диаграммы при обоих способах расчета (ковариантном и светоподобном) расходящуюся (после интегрирования) часть, не зависящую от внешних импульсов. Выделенная расходящаяся величина может быть скомпенсирована (в ковариантной и светоподобной теориях возмущения независимо) перенормировкой массы бозона m. После этого можно сопоставить диаграмме рис. 8, *а* оставшееся после выделения расходимости подынтегральное выражение и снять промежуточную УФ регуляризацию.

Теперь все диаграммы будут УФ конечны, однако для получившегося выражения диаграммы рис. 8, *а*, равно как и для диаграммы рис. 8, *б* все еще будут нарушены условия (I.3), так как для них равен нулю индекс ω_+ УФ расходимости по q_+. Это означает, что интеграл по q_+ сходится лишь в смысле главного значения (а именно такое значение интеграла нужно брать в светоподобных координатах, чтобы обеспечить соответствие со стационарной нековариантной теорией возмущений). Получить это значение можно, выделив четную по q_+ часть подынтегрального выражения. Нечетная часть дает нуль при интегрировании в смысле главного значения. На самом деле удобнее выделить четную часть по всему четырехмерному импульсу q_μ. После этого оказывается, что для всех диаграмм выполнены условия (I.3) и можно показать, что после операций, сделанных с диаграммами рис. 8 показатель σ (см. формулу (I.29)) для всех их конфигураций не уменьшается. Это означает, что можно применять общий метод построения гамильтониана в к. с. ф.

Бозонная П-линия дает в величину μ вклад "-1". Из формулы (II.4) видно, что фермионный пропагатор П-линии дает в величину μ вклад "0", если γ несет индекс "$-$", либо "-1" в остальных случаях. Анализируя эту информацию, можно заключить, что для произвольной конфигурации $\sigma \geq 0$, а все случаи с $\sigma = 0$ изображены на рис. 9.

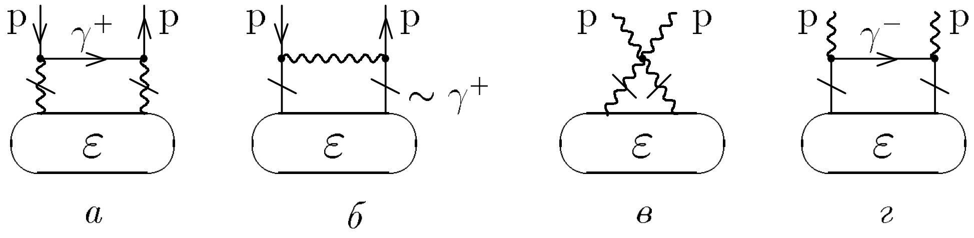

Рис. 9. Ненулевые конфигурации в модели Юкавы. p – внешний импульс; символ γ^+ или γ^- на линии означает, что в числителе пропагатора взято соответствующее слагаемое; в конфигурации *б*, представляющей собой матрицу по спинорным индексам, имеется в виду ее часть, пропорциональная γ^+.

Заметим, что все эти конфигурации двуххвостые, а значит (см. п. I.4), вторичных конфигураций нет. Следовательно, существуют ненулевые конфигурации только первичные или аналогичные им повторные, и все они имеют вид, изображенный на рис. 9. Так как пропагаторы ε-линий после вычеркивания знаменателей не убывают, легко видеть, что для указанных конфигураций степень расходимости α положительна и максимум в формуле (I.25) достигается на самой диаграмме. Поэтому логарифмических поправок по ε нет, и можно легко получить зависимость найденных ненулевых конфигураций от внешних импульсов, применяя формулу (I.31). Тогда, обозначив через $D_{\text{а}},\ldots,D_{\text{г}}$ результат взятия предела $\varepsilon\to 0$ и интегрирования по внутренним поперечным импульсам сумм всех конфигураций, изображенных на рис. 9 *а,...,г* соответственно, приходим к равенствам

$$D_{\text{а}}=\frac{\gamma^+}{p_-}C_{\text{а}},\quad D_{\text{б}}=\frac{\gamma^+}{p_-}C_{\text{б}},\quad D_{\text{в}}=C_{\text{в}},\quad D_{\text{г}}=C_{\text{г}},\qquad \text{(II.5)}$$

где выражения $C_{\text{а}},\ldots,C_{\text{г}}$ не зависят от внешних импульсов, а только от масс, констант связи и параметра УФ регуляризации $\Lambda_\perp$.

Таким образом, для восстановления соответствия с ковариантной теорией к каноническому гамильтониану в к. с. ф. нужно добавить следующие исправляющие контрчлены:

$$C_1\,\varphi^2\quad\text{и}\quad C_2\,\bar\psi\,i\gamma^+\partial_-^{-1}\,\psi.\qquad \text{(II.6)}$$

Первый из них является дополнительной перенормировкой массы бозона, в то время как второй отсутствует в исходном лагранжиане. Следует отметить, тем не менее, что последний можно разбить на слагаемые, каждое из которых присутствует в каноническом гамильтониане, из-за чего его можно формально интерпретировать как независимую перенормировку квадрата массы фермиона и ее первой степени.

Необходимо отметить также, что из-за нарушения УФ регуляризацией полной лоренц-инвариантности при перенормировке возникают дополнительные контрчлены, о чем говорилось в начале этого пункта.

Такая проблема отсутствует при использовании лоренц-инвариантной регуляризации Паули-Вилларса. Более того, нетрудно убедиться, что в этом случае выражение

$$\omega_-^r-\omega_+^r-\mu^r+\eta^r\qquad \text{(II.7)}$$

из формулы (I.29) увеличивается (так как увеличивается число знаменателей пропагатора; при этом вклад от ε-линий не меняется, а от П-линий, принадлежащих D_r, добавляется 0 в $\omega_-^r - \omega_+^r$ и в η^r, но -1 в μ^r). Поскольку $\tau > 0$, то при такой регуляризации оказывается, что $\sigma > 0$ для конфигураций, бывших ненулевыми (достаточно одного бозонного и одного фермионного дополнительного поля). Тогда оказывается, что канонический гамильтониан в к. с. ф. вообще не требует исправления, но теория содержит индефинитную метрику, что затрудняет поиск спектра связанных состояний в к. с. ф.

2. Бозонизованная двумерная КЭД

2.1 Анализ УФ расходимости

В результате бозонизации (1+1)-мерной КЭД [18, 19, 20, 21, 22] в лоренцевых координатах $x^\mu = \{x^0, x^1\}$ получается лагранжиан, являющийся модифицированным лагранжианом модели синус-гордон. Соответствующая плотность лагранжиана имеет вид

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) - \gamma\left(\cos\theta - :\cos(\varphi+\theta):\right), \qquad \text{(II.8)}$$

где $\varphi(x)$ – происходящее из УФ перенормированных фермионных токов скалярное поле; θ – параметр, характеризующий "инстантонный" вакуум [20, 36]; $m = e/\sqrt{\pi}$ – бозонная масса Швингера; e – константа связи исходной КЭД; $\gamma = Mme^c/(2\pi)$, M – масса фермиона, $c = 0.577216$ – константа Эйлера; символ нормального упорядочивания, ::, определяет расположение операторов рождения и уничтожения после квантования. Наличие этого символа означает, что при построении лоренц-ковариантной теории возмущений по степеням γ отбрасываются все диаграммы, содержащие линии, которые начинаются и кончаются в одной и той же вершине. Предполагается, что поле φ не обладает нулевой модой по x^1, т. е. $\int dx^1\varphi(x) = 0$. Из-за этого действие не содержит линейных по φ членов.

Заметим, что обычно член взаимодействия в модели синус-гордон имеет вид $\cos(\beta u)$. Лагранжиан (II.8) соответствует выбору $\beta = \sqrt{4\pi}$ (для удобства используется переменная $\varphi = \sqrt{4\pi}u$), что является критическим случаем при рассмотрении возможности точного решения модели.

Диаграммная техника для лагранжиана (II.8), соответствующая теории возмущений по γ, выглядит следующим образом. Вершина с четным числом хвостов $2j$ дает множитель

$$i\gamma(-1)^j \cos(\theta), \quad j \geq 1, \tag{II.9}$$

а вершина с нечетным числом хвостов $2j+1$ дает множитель

$$-i\gamma(-1)^j \sin(\theta), \quad j \geq 1. \tag{II.10}$$

Общую формулу для вершины с произвольным числом хвостов j можно записать в виде

$$i^{j+1}\gamma c_j(\theta), \quad j \geq 2, \tag{II.11}$$

где введено обозначение

$$c_j(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta), & \text{если } j \text{ четное} \\ i\sin(\theta), & \text{если } j \text{ нечетное} \end{cases}. \tag{II.12}$$

Пропагатор, соответственно, в импульсном и в координатном пространстве имеет вид

$$\Delta(k) = \frac{i}{\pi}\frac{1}{k^2 - m^2 + i0}, \qquad \Delta(x) = \int dk\, e^{ikx}\Delta(k), \tag{II.13}$$

где $dk = dk_0 dk_1$, $kx = k_0 x^0 + k_1 x^1$. Существенно, что квадратичный по φ член, возникающий при разложении $:\cos(\varphi+\theta):$ в ряд, относится ко взаимодействию и не включается в свободный лагранжиан.

Прежде всего, исследуем, является ли теория возмущений по γ ультрафиолетово (УФ) конечной. Из-за наличия во взаимодействии сколь угодно высоких степеней поля φ оказывается, что в каждом конечном порядке по γ присутствует бесконечное число диаграмм. Если рассматривать конкретные диаграммы, то оказывается, что они все конечны и условия (I.3) для них выполнено. Действительно, расходится могли бы только диаграммы, содержащие поддиаграмму, изображенную на рис. 10, которая расходится логарифмически. Но такие поддиаграммы исключаются нормальным упорядочиванием.

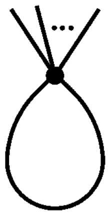

Рис. 10. Диаграмма, расходящаяся логарифмически.

Тем не менее оказывается, что бесконечная сумма диаграмм данного порядка по γ может расходится, причем эта расходимость ультрафиолетовая, так как она снимается введением УФ регуляризации. Так ведет себя сумма диаграмм

$$s_{ln} = \sum_{m=2}^{\infty} D_{lmn}, \qquad s_{ln} = s_{nl}, \tag{II.14}$$

где D_{lmn} – диаграмма, изображенная на рис. 11.

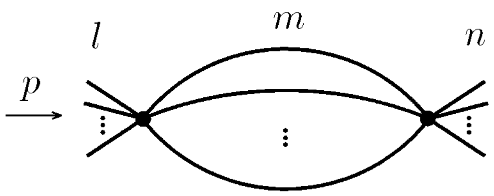

Рис. 11. Диаграмма D_{lmn}. l – число внешних линий, входящих в левую вершину; n – в правую; m – число линий, соединяющих вершины. p – общий импульс, протекающий через диаграмму.

Действительно,

$$s_{ln} = \frac{\gamma^2}{l!n!(1+\delta_{ln})} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} c_{l+m}(\theta) i^{l+m+1} c_{n+m}(\theta) i^{n+m+1} \times$$
$$\times \int \prod_{j=1}^{m} dk_j \, (2\pi)^2 \, \delta\Big(\sum_{j=1}^{m} k_j - p\Big) \prod_{j=1}^{m} \Delta(k_j), \tag{II.15}$$

где p – сумма импульсов внешних линий, присоединенных к одной вершине, δ_{ln} – символ Кронекера. Симметрийный коэффициент диаграммы выбран в таком виде, чтобы функция Грина получалась суммированием величин s_{ln} по всем перестановкам внешних импульсов. Вычислим:

$$s_{ln} = \frac{\gamma^2}{l!n!(1+\delta_{ln})} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} c_{l+m}(\theta) c_{n+m}(\theta) i^{l+n+2m+2} \times$$
$$\times \int dx\, e^{-ipx} \Delta(x)^m =$$
$$= -\frac{\gamma^2 i^{l+n}}{l!n!(1+\delta_{ln})} \int dx\, e^{-ipx} \Big(c_{l+1}(\theta) c_{n+1}(\theta) \Big(\Delta(x) - \mathrm{sh}(\Delta(x)) \Big) +$$
$$+ c_l(\theta) c_n(\theta) \Big(\mathrm{ch}(\Delta(x)) - 1 \Big) \Big), \tag{II.16}$$

где использовано определение (II.12). При $x \to 0$

$$\Delta(x) \sim \ln \frac{1}{x^2}. \tag{II.17}$$

Гиперболические функции от этого аргумента в выражении (II.16) приводят к логарифмической расходимости при интегрировании по x.

Оказывается, что несмотря на расходимость s_{ln}, сумма всех таких диаграмм, входящих в функцию Грина, будет конечной. Действительно, расходящаяся часть (II.16) пропорциональна

$$s_{ln}^{\infty} = -\frac{\gamma^2 i^{l+n}}{2l!n!(1+\delta_{ln})} \left(c_l(\theta) c_n(\theta) - c_{l+1}(\theta) c_{n+1}(\theta) \right). \tag{II.18}$$

Величина в скобках в (II.18) равна нулю, если l и n имеют разную четность, 1 – если они четны, -1 – если они нечетны. Следовательно

$$s_{ln}^{\infty} = -\frac{\gamma^2 i^{l+n}}{4l!n!(1+\delta_{ln})} \left((-1)^l + (-1)^n \right). \tag{II.19}$$

В функцию Грина входит сумма

$$\sum_{0 \le l \le j/2} s_{l,j-l}, \tag{II.20}$$

ее расходящаяся часть есть

$$\sum_{0 \le l \le j/2} s_{l,j-l}^{\infty} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{j} s_{l,j-l}^{\infty} (1 + \delta_{l,j-l}) =$$

$$= -\frac{\gamma^2 i^j}{8j!}\left(\sum_{l=0}^{j} C_j^l(-1)^l + \sum_{l=0}^{j} C_j^l(-1)^{j-l}\right) =$$

$$= -\frac{\gamma^2 i^j}{8j!}\left((-1+1)^j + (1-1)^j\right) = 0, \qquad \text{(II.21)}$$

что и утверждалось выше.

На основании этого можно предположить, что бозонная теория УФ конечна. Но даже в этом случае в любых рассуждениях нельзя использовать диаграммы s_{ln} отдельно, а только в виде суммы (II.20). Последний факт играет решающую роль при построении гамильтониана в к. с. ф.

2.2 Построение гамильтониана

Попробуем построить исправленный гамильтониан в к. с. ф., обладающий светоподобной регуляризацией $|k_-| > \varepsilon$ (т. е. считается, что в Фурье разложении поля φ нет мод с $|k_-| \leq \varepsilon$), и порождающий теорию возмущений, эквивалентную обычной ковариантной в пределе $\varepsilon \to 0$. Начнем с канонического гамильтониана H^{can}, соответствующего лагранжиану (II.8), часть которого, отвечающая взаимодействию, имеет вид

$$H_I^{can} = \gamma\left(\cos\theta - :\cos(\varphi+\theta):\right) =$$
$$= \gamma\cos\theta\,(1 - :\cos\varphi:) + \gamma\sin\theta :\sin\varphi: . \qquad \text{(II.22)}$$

Здесь символ :: обозначает нормальное упорядочение относительно операторов рождения и уничтожения, присущих теории в к. с. ф., которые определяются на основе квадратичного по полям генератора P_- (формула (B.1)).

В соответствии с изложенным в главе I методом, проанализируем сначала первичные конфигурации (см. определение в п. I.4). В рассматриваемой теории числители пропагаторов отсутствуют, следовательно, $\tau > 0$, так как всегда есть хотя бы один элемент объема, и $\eta \geq 0$ (см. определения в п. I.3). Теория скалярная, поэтому, из-за лоренц-инвариантности, $\omega_- - \omega_+ = 0$. Вклад в μ от одной П-линии равен -1, следовательно, если присутствует хотя бы одна П-линия, то по формуле (I.29) $\sigma > 0$, т. е. конфигурация является нулевой. Отсюда следует, что все первичные ненулевые конфигурации имеют вид, изображенный на рис. 12, причем для них $\sigma = 0$. Легко доказать, что вторичных конфигураций нет. Очевидно, нет также повторных.

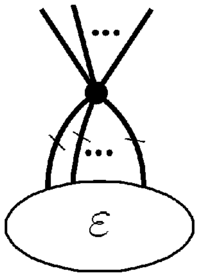

Рис. 12. Общий вид ненулевой конфигурации.

Разница между ковариантным и светоподобным расчетами для любой другой конкретной диаграммы должна стремиться к нулю при $\varepsilon \to 0$ и такие диаграммы, казалось бы, не должны давать вклада в контрчлены. Но это не так из-за присутствия в данном порядке теории возмущений бесконечного числа таких диаграмм, сумма которых может расходиться. Примером является величина s_{ln} при $l, n > 0$. Как говорилось выше, из-за расходимости ее нельзя рассматривать отдельно, а только в виде суммы

$$\sum_{0\le l\le j/2} s_{l,j-l} = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{0\le l\le j/2} D_{lmn}. \tag{II.23}$$

Разница для этой суммы конечна при каждом ε, но о ее зависимости от ε, а, значит, и от внешних импульсов, без прямого вычисления сказать ничего нельзя вследствие неравномерной по ε сходимости ряда для разницы. Из-за этой проблемы оказывается невозможным найти в замкнутом виде исправленный гамильтониан в к. с. ф. без введения УФ регуляризации.

2.3 Использование регуляризации Паули-Вилларса

Обойти возникшую проблему можно, если ввести УФ регуляризацию и строить исправляющие контрчлены к гамильтониану при фиксированном параметре УФ регуляризации. Причем, разумеется, снимать регуляризацию можно только после того как взят предел $\varepsilon \to 0$. Пока параметр УФ регуляризации конечен, будет отсутствовать сингулярность при $x = 0$ в формуле (II.17), а, значит, величина s_{ln} будет сходится и может рассматриваться отдельно при любых l, n. Для того чтобы можно было применять изложенный в главе I метод, УФ регуляризация должна действовать одновременно в лоренцевых и в светоподобных координатах.

Применим регуляризацию Паули-Вилларса, которая безусловно обладает требуемым свойством из-за своей лоренц-инвариантности. Регуляризованный лагранжиан будет выглядеть так:

$$L = \frac{1}{8\pi} \sum_{l=0,1} (-1)^l \left(\partial_\mu \varphi_l \partial^\mu \varphi_l - m_l^2 \varphi_l^2 \right) - \\ -\gamma \left(\cos\theta - :\cos(\varphi + \theta): \right), \qquad \text{(II.24)}$$

где $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, φ_0 – обычное поле, φ_1 – вспомогательное поле Паули-Вилларса (духовое), m_0 – масса обычного поля, m_1 – масса Паули-Вилларса, являющаяся параметром УФ регуляризации. Снятием регуляризации является переход к пределу $m_1 \to \infty$.

Диаграммная техника для лагранжиана (II.24) выглядит так: вершина дает, как и раньше, множитель (II.11), а суммарный пропагатор полей φ_0 и φ_1 равен

$$\Delta(k) = \frac{i}{\pi} \frac{1}{k^2 - m_0^2 + i0} - \frac{i}{\pi} \frac{1}{k^2 - m_1^2 + i0} = \\ = \frac{i}{\pi} \frac{m_0^2 - m_1^2}{(k^2 - m_0^2 + i0)(k^2 - m_1^2 + i0)}. \qquad \text{(II.25)}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, опять заключаем, что все ненулевые первичные конфигурации имеют вид, изображенный на рис. 12, причем для них $\sigma = 0$, а вторичных конфигураций нет. Ясно, что у соответствующей диаграммы изображенная конфигурация является единственной.

Можно доказать, что результат светоподобного расчета диаграмм вида рис. 12 дает точный ноль. Действительно, как показано в утверждении 1 приложения 1 главы I, при светоподобном расчете все интегралы по петлевым импульсам k_- автоматически ограничиваются (после интегрирования по k_+) областью, размеры которой есть модуль наибольшего внешнего импульса p_-, умноженный на числовой коэффициент. С другой стороны, диаграммы вида рис. 12 не зависят от внешних импульсов, а значит, изменив значения внешних импульсов можно сделать размер упомянутой области сколь угодно меньше ε, в результате чего область интегрирования станет пустым множеством. Таким образом, разница между ковариантным и светоподобным расчетами диаграммы вида рис. 12 (совпадающая с ее единственной конфигурацией) равна результату ее ковариантного расчета, и значит, исправляющие контрчлены к гамильтониану должны порождать все диаграммы вида рис. 12, вычисленные ковариантным способом. Еще раз подчеркнем, что они не зависят от внешних импульсов.

Обозначим результат ковариантного вычисления произвольной диаграммы вида рис. 12 порядка n по γ через $R_{lm}^{n(i)}$, где l – число ее внешних линий; m – число внутренних линий, выходящих из вершины, к которой присоединяются внешние линии; а индекс i нумерует различные диаграммы с фиксированными n, l, m. Анализируя симметрийные коэффициенты и вершинные множители (II.11), легко установить, что

$$R_{lm}^{n(i)} = \begin{cases} R_{0m}^{n(i)} r_m^{n(i)} (-1)^{l/2}, & l \text{ чет.} \\ R_{0m}^{n(i)} r_m^{n(i)} (-1)^{(l-1)/2} (-\mathrm{tg}\theta), & l \text{ неч.}, m \text{ чет.}, \\ R_{0m}^{n(i)} r_m^{n(i)} (-1)^{(l+1)/2} (-\mathrm{ctg}\theta), & l \text{ неч.}, m \text{ неч.} \end{cases} \qquad \text{(II.26)}$$

где $r_m^{n(i)}$ – число вершин в диаграмме $R_{0m}^{n(i)}$, эквивалентных вершине, к которой в диаграмме $R_{lm}^{n(i)}$ присоединяются внешние импульсы (включая последнюю).

Слагаемое в гамильтониане вида $:\varphi^n:/n!$ порождает n-хвостую вершину с вершинным множителем $-i$. Поэтому контрчлен, порождающий сумму всех диаграмм $R^{n(i)}_{lm}$ с четными числом внешних линий l и фиксированным m есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} R^{n(i)}_{2k,m}\frac{i}{(2k)!}:\varphi^{2k}:=\sum_{k=1}^{\infty} R^{n(i)}_{0m}r^{n(i)}_m(-1)^k\frac{i}{(2k)!}:\varphi^{2k}:=$$
$$=-ir^{n(i)}_m R^{n(i)}_{0m}\left(1-:\cos\varphi:\right). \tag{II.27}$$

Величина $R^{n(i)}_{0m}$ – это вклад диаграммы в плотность вакуумной связной функции Грина (плотность – потому что общая δ-функция внешних импульсов вместе с множителем $(2\pi)^2$, в данном случае $(2\pi)^2\delta(0)=V$, где V – объем пространства-времени, считается отброшенной). Складывая выражения (II.27) для всех разных $R^{n(i)}_{lm}$, для которых $R^{n(i)}_{0m}$ одинакова, а затем суммируя по m, получаем

$$H^n_1=-in\left(1-:\cos\varphi:\right)\sum_{i,m}R^{n(i)}_{0m}, \tag{II.28}$$

так как внешние линии могут присоединяться по очереди к представителям каждой группы эквивалентных вершин, а число вершин в такой группе равно $r^{n(i)}_m$. Просуммировав это выражение по n, получим искомый контрчлен к гамильтониану, порождающий все диаграммы вида рис. 12 с четным числом внешних линий

$$H_1=\sum_n H^n_1=\tilde{C}_1\left(1-:\cos\varphi:\right),\quad \tilde{C}_1=-i\sum_{i,m,n}nR^{n(i)}_{0m}. \tag{II.29}$$

Коэффициент $\tilde{C}_1$ зависит от величин γ, θ, m_0 и параметра УФ регуляризации m_1, причем может расходиться при снятии регуляризации.

Теперь найдем контрчлен, порождающий сумму всех диаграмм $R^{n(i)}_{lm}$ с нечетными числом внешних линий l и фиксированном m. Если m четно, он равен

$$\sum_{k=0}^{\infty} R^{n(i)}_{2k+1,m}\frac{i}{(2k+1)!}:\varphi^{2k+1}:=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} R_{0m}^{n(i)} r_m^{n(i)} (-1)^k (-\mathrm{tg}\theta) \frac{i}{(2k+1)!} : \varphi^{2k+1} :=$$

$$= -i\mathrm{tg}\theta r_m^{n(i)} R_{0m}^{n(i)} : \sin\varphi : \tag{II.30}$$

а если m нечетно

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_{2k+1,m}^{n(i)} \frac{i}{(2k+1)!} : \varphi^{2k+1} :=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} R_{0m}^{n(i)} r_m^{n(i)} (-1)^{k+1} (-\mathrm{ctg}\theta) \frac{i}{(2k+1)!} : \varphi^{2k+1} :=$$

$$= i\mathrm{ctg}\theta r_m^{n(i)} R_{0m}^{n(i)} : \sin\varphi : \tag{II.31}$$

В каждой вершине стоит множитель $\cos\theta$, если к вершине подходит четное число линий, или $\sin\theta$, если нечетное. Формулы (II.30),(II.31) соответствуют случаю присоединения внешних линий к вершине с числом хвостов m. Ясно, что результат умножения на $-\mathrm{tg}\theta$ для четного m или на $\mathrm{ctg}\theta$ для нечетного m можно представить как действие производной $\frac{\partial}{\partial\theta}$ на множители $\cos\theta$ или $\sin\theta$, соответственно, стоящие в данной вершине. Складывая при фиксированных m выражения (II.30) и (II.31) для всех разных $R_{lm}^{n(i)}$, для которых $R_{0m}^{n(i)}$ одинакова, учитывая множитель $r_m^{n(i)}$, получаем n слагаемых, в каждом из которых производная $\frac{\partial}{\partial\theta}$ действует на свой множитель, что после суммирования по m дает

$$H_2^n = i : \sin\varphi : \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i,m} R_{0m}^{n(i)}. \tag{II.32}$$

Просуммировав это выражение по n, получим искомый контрчлен к гамильтониану, порождающий все диаграммы вида рис. 12 с нечетным числом внешних линий

$$H_2 = \sum_n H_2^n = \tilde{C}_2 : \sin\varphi :, \qquad \tilde{C}_2 = i\frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{i,m,n} R_{0m}^{n(i)}. \tag{II.33}$$

Так же как $\tilde{C}_1$, коэффициент $\tilde{C}_2$ зависит от величин γ, θ, m_0 и параметра УФ регуляризации m_1, причем может расходиться при снятии регуляризации.

Добавление контрчленов H_1 и H_2 превращает канонический гамильтониан на световом фронте в исправленный, часть которого соответствующая взаимодействию принимает вид

$$H_I = H_I^{can} + H_1 + H_2 = C_1\,(1- :\cos\varphi:) + C_2 :\sin\varphi:$$
$$C_1 = \gamma\cos\theta + \tilde{C}_1, \quad C_2 = \gamma\sin\theta + \tilde{C}_2. \tag{II.34}$$

Исправленный гамильтониан порождает теорию, пертурбативно эквивалентную ковариантной теории, если параметрам ковариантной теории γ и θ сопоставлены некоторым образом коэффициенты C_1 и C_2.

Оказывается, что коэффициенты C_1, C_2 можно представить в виде некоторых конденсатов, определенных в лоренцевых координатах. Для этого заметим, что величину $\tilde{C}_1$ из (II.29) можно представить в виде

$$\tilde{C}_1 = -i\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\sum_{i,m,n} R_{0m}^{n(i)} = -i\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\tilde{G}_0, \tag{II.35}$$

где $\tilde{G}_0$ – плотность вакуумной связной функции Грина. Из (II.33) получаем, что

$$\tilde{C}_2 = i\frac{\partial}{\partial\theta}\tilde{G}_0. \tag{II.36}$$

Поскольку $\tilde{G}_0$ – плотность вакуумной связной функции Грина, то

$$\tilde{G}_0 = \frac{1}{V}\ln G_0, \tag{II.37}$$

где V – объем пространства, а G_0 – вакуумная функция Грина

$$G_0 = \langle 0|\mathrm{T}\exp\left(iS_I\right)|0\rangle, \tag{II.38}$$

S_I – действие взаимодействия, нормально упорядоченное в лоренцевых координатах,

$$S_I = \int dx\,\gamma\left(:\cos(\varphi+\theta): - \cos\theta\right). \tag{II.39}$$

Отсюда получаем

$$C_1 = \gamma\cos\theta - i\frac{\gamma}{VG_0}\langle 0|\mathrm{T}\int dx\, i\,(:\cos(\varphi+\theta): - \cos\theta)\, e^{iS_I}|0\rangle =$$
$$= \gamma\cos\theta + \gamma\frac{\langle 0|\mathrm{T}\,(:\cos(\varphi+\theta): - \cos\theta)\, e^{iS_I}|0\rangle}{\langle 0|\mathrm{T}e^{iS_I}|0\rangle} =$$
$$= \gamma\cos\theta + \gamma\langle\Omega|\,(:\cos(\varphi+\theta): - \cos\theta)\,|\Omega\rangle =$$
$$= \gamma\langle\Omega|:\cos(\varphi+\theta):|\Omega\rangle, \tag{II.40}$$

$$C_2 = \gamma\sin\theta + i\frac{1}{VG_0}\langle 0|\mathrm{T}\int dx\, i\gamma\,(-:\sin(\varphi+\theta): + \sin\theta)\, e^{iS_I}|0\rangle =$$
$$= \gamma\sin\theta + \gamma\frac{\langle 0|\mathrm{T}\,(:\sin(\varphi+\theta): - \sin\theta)\, e^{iS_I}|0\rangle}{\langle 0|\mathrm{T}e^{iS_I}|0\rangle} =$$
$$= \gamma\sin\theta + \gamma\langle\Omega|\,(:\sin(\varphi+\theta): - \sin\theta)\,|\Omega\rangle =$$
$$= \gamma\langle\Omega|:\sin(\varphi+\theta):|\Omega\rangle, \tag{II.41}$$

и часть исправленного гамильтониана, соответствующая взаимодействию, имеет вид

$$H_I = \gamma\,(1 - :\cos\varphi:)\,\langle\Omega|:\cos(\varphi+\theta):|\Omega\rangle +$$
$$+\gamma :\sin\varphi: \langle\Omega|:\sin(\varphi+\theta):|\Omega\rangle. \tag{II.42}$$

Здесь $|\Omega\rangle$ – физический вакуум, а величины

$$\langle\Omega|:\cos(\varphi+\theta):|\Omega\rangle, \quad \langle\Omega|:\sin(\varphi+\theta):|\Omega\rangle \tag{II.43}$$

это конденсаты, вычисляемые в лоренцевых координатах, причем нормальное упорядочение идет в них по вакууму свободной лоренцевой теории, в то время как остальные нормальные упорядочивания в (II.42) идут по свободному вакууму светоподобной теории, который совпадает с физическим вакуумом.

Оказывается, что при вычислении этих конденсатов по теории возмущений в лоренцевых координатах они расходятся [36], если не вводить УФ регуляризацию, а значит, в нашем случае они расходятся при стремлении массы m_1 к бесконечности.

Интересно отметить, что выражение (II.42) совпадает с гамильтонианом, получаемым с помощью метода предельного перехода, описанного в работе [37]. В отличие от использованного здесь, метод предельного перехода требует некоторых дополнительных предположений.

Полученный гамильтониан можно применить для непертурбативного расчета спектра связанных состояний в к. с. ф. Этот спектр должен совпадать со спектром теории 1+1 КЭД при следующем условии: в процессе данного расчета сначала должен браться предел $\varepsilon \to 0$ (при вычислениях необходимо вводить "светоподобную" регуляризацию $|k_-| > \varepsilon$), а только потом сниматься УФ регуляризация.

Глава III
Гамильтониан КХД в координатах светового фронта

Основным объектом применения изложенного в главе I метода построения гамильтониана в к. с. ф. является четырехмерная квантовая хромодинамика – теория с сильной связью. Перед тем как приступить к построению гамильтониана КХД, сделаем несколько замечаний.

Во-первых, оказывается, что развивать гамильтонов формализм в к. с. ф. для поля Янга-Миллса можно только в калибровке типа аксиальной $A_- = 0$ [11, 12]. Это связано с тем, что в теории возникают связи второго рода, решение которых, в частности, требует обращения ковариантной производной $D_- = \partial_- + igA_-$. В калибровке $A_- = 0$ пропагатор глюона имеет дополнительный полюс по k_-. Доказательство перенормируемости теории в лоренцевых координатах в такой калибровке можно провести [38, 39], только при обходе этого полюса в соответствии с предписанием Мандельстама и Лейббрандта [29, 30]. Предложенный ими пропагатор имеет вид

$$\frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{2k_+ k_- + i0} 2k_+\right) \tag{III.1}$$

где $\mu, \nu = +, -, 1, 2$; $k_\pm = (k_0 \pm k_3)/\sqrt{2}$; $n_+ = 1, n_{-,1,2} = 0$.

Второе замечание связано с проблемой калибровочно-инвариантной УФ регуляризации для теории Янга-Миллса. Дело в том, что единственная полная калибровочно-инвариантная регуляризация – размерная – не может применяться в рамках операторного формализма, а только в теории возмущений. Поэтому ее нельзя использовать при гамильтоновом подходе. Не существует полной решеточной регуляризации, пригодной одновременно в лоренцевых координатах и при гамильтоновом подходе в к. с. ф. Регуляризация методом высших ковариантных производных неполна из-за однопетлевых расходимостей, которые не устраняются обычным путем при гамильтоновом подходе [40].

Кроме того, она порождает неразрешимые связи второго рода при каноническом квантовании в к. с. ф. [41]. Таким образом, оказывается, что для гамильтонового подхода калибровочно-инвариантной регуляризации нет. Из-за этого приходится использовать регуляризацию, нарушающую калибровочную инвариантность, что приводит к существенному увеличению числа перенормировочных контрчленов.

Поскольку существует доказательство перенормируемости в лоренцевых координатах (с применением размерной регуляризации) [38, 39], нет необходимости независимо проверять перенормируемость теории возмущений, порождаемой гамильтоновым подходом с нарушением калибровочной инвариантности. Достаточно доказать, что при некотором выборе коэффициентов перед контрчленами гамильтониана все функции Грина, порождаемые этим гамильтонианом, совпадают в пределе снятия регуляризации с ковариантными перенормированными функциями Грина.

Следует также отметить, что в калибровке $A_- = 0$ 1-неприводимые вершинные части, несущие верхний индекс "$-$", не дают вклада в функции Грина. Поскольку массы связанных состояний определяются полюсами функции Грина, то достаточно доказать лишь совпадение в каждом порядке теории возмущений в пределе снятия регуляризации светоподобного и ковариантного расчетов (см. определения в начале главы I) функций Грина, но не вершинных частей, имеющих индекс "$-$".

1. Прямое применение метода к калибровочным теориям

В соответствие с описанным методом, нужно, как минимум, добавить к каноническому гамильтониану в к. с. ф. контрчлены, порождающие все первичные ненулевые конфигурации (см. определение в п. 2 главы I). Оказывается, что в калибровке $A_- = 0$ для четырехмерной КХД (равно как и для КЭД) существуют ненулевые конфигурации со сколь угодно большим числом внешних линий. Пример такой конфигурации приведен на рис. 13.

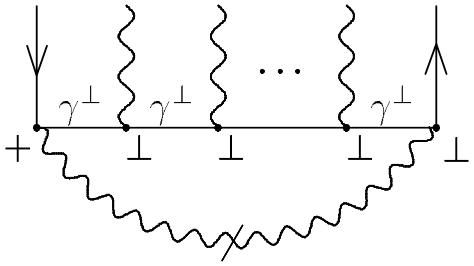

Рис. 13. Ненулевая конфигурация со сколь угодно большим числом внешних линий в калибровочной теории. Символы $\gamma^\perp$ на линиях, $+$ или $\perp$ рядом с вершинами означают, что в числителях пропагаторов и в вершинных множителях берутся соответствующие слагаемые γ^+ или $\gamma^\perp$.

Действительно, используем формулу (I.29). Видно, что для этой конфигурации $\tau = 0$, а следовательно $\sigma \leq 0$, т. е. конфигурация ненулевая. Ясно также, что введение регуляризации Паули-Вилларса ситуацию не улучшит, так как не может повлиять на величину τ.

Таким образом, в рамках применяемого метода, для исправления канонического гамильтониана калибровочной теории в к. с. ф. к нему необходимо добавить бесконечное число контрчленов содержащих сколь угодно высокие степени полей. Поэтому не удается получить исправленный гамильтониан в замкнутом виде. Оказывается, тем не менее, что с помощью метода, изложенного в главе I, все-таки можно построить удовлетворительный гамильтониан, но для этого нужно ввести дополнительную регуляризацию.

2. Введение дополнительной регуляризации

Как видно на приведенном в предыдущем пункте примере, большое количество ненулевых конфигураций возникает из-за полюса по k_- в пропагаторе, который дает отрицательный вклад в τ. Наличие этого полюса становится хорошо заметным, если переписать пропагатор (III.1) в виде

$$\frac{-i\delta^{ab}}{k^2+i0}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu n_\nu+k_\nu n_\mu}{k_-+i0k_+}\right). \tag{III.2}$$

Поэтому ситуацию можно улучшить, если упомянутый полюс регуляризовать. Способ регуляризации подсказывается видом полюса в формуле (III.1) – так как знаменатель имеет вид обычного фейнмановского безмассового знаменателя в двух измерениях, естественно ввести регуляризацию, при которой в нем появляется масса. Этого можно добиться, умножив пропагатор на величину

$$\frac{k_\parallel^2}{k_\parallel^2-\mu^2+i0}, \tag{III.3}$$

где $k_\parallel^2=2k_+k_-$, для чего нужно умножить глюонную квадратичную часть лагранжиана на

$$\frac{k_\parallel^2-\mu^2}{k_\parallel^2}=1-\frac{\mu^2}{k_\parallel^2}. \tag{III.4}$$

К сожалению, напрямую этого сделать нельзя, так как второе слагаемое оказывается неполиномиальным по компоненте импульса k_+, сопряженной со светоподобным временем x^+, что чрезвычайно неудобно для гамильтонова подхода. Но можно поступить следующим образом. Представим (III.3) в виде суммы двух слагаемых

$$\frac{k_\parallel^2}{k_\parallel^2-\mu^2+i0}=1+\frac{\mu^2}{k_\parallel^2-\mu^2+i0}, \tag{III.5}$$

каждое из которых при обращении становится полиномиальным по $k_\parallel$. Получить разбиение пропагатора на сумму двух можно, вводя дополнительное поле, аналогично тому, как это делается при регуляризации Паули-Вилларса. Квадратичная часть исходного, физического, поля должна умножится на "1" , т. е. не измениться, а квадратичная часть дополнительного поля должна умножится на

$$\frac{k_\parallel^2}{\mu^2}-1. \tag{III.6}$$

Появление в лагранжиане лишнего множителя $k_{\parallel}^2$, превращающегося в координатном пространстве в $\partial_{\parallel}^2$ не мешает развивать гамильтонов подход в к. с. ф., так как, несмотря на это, с помощью интегрирования по частям можно добиться отсутствия в лагранжиане вторых производных от полей по светоподобному времени x^+. Это связано с тем, что в к. с. ф., в отличие от лоренцевых координат, $\partial_{\parallel}^2$ содержит производную по времени линейно.

Описанная дополнительная регуляризация нарушает калибровочную инвариантность, но это не играет существенной роли, так как последняя все равно будет нарушена УФ регуляризацией. Несмотря на то, что "светоподобная" регуляризация (см. определение в начале главы I), равно как дополнительная регуляризация, нарушают лоренц-инвариантность, удобно вводить УФ регуляризацию так, чтобы еще одного нарушения лоренц-инвариантности не возникало. Это связано с тем, что можно последовательно снять "светоподобную" и дополнительную регуляризацию (на самом деле, в прямом смысле снимать дополнительную регуляризацию, т. е. устремлять μ к нулю при фиксированном параметре УФ регуляризации нельзя, но это можно имитировать, уменьшая μ "быстрее", чем снимается УФ регуляризация; более точно процедура снятия регуляризации будет описана ниже). Тогда при анализе УФ расходимостей останется только УФ регуляризация, и ее лоренц-инвариантность уменьшает число необходимых контрчленов, хотя увеличивает количество "духов". Из-за этого гамильтониан действует в пространстве с индефинитной метрикой, что мешает использовать обычный вариационный принцип для решения уравнения Шреденгера в условиях сохранения регуляризации. Тем не менее, существуют иные вариационные методы, позволяющие решать это уравнение.

В связи с громоздкостью регуляризованного лагранжиана КХД не будем описывать процесс появления контрчленов, а предъявим окончательный вид лагранжиана, и докажем, что есть такой способ выбора входящих в него коэффициентов, при котором полученная теория в к. с. ф. пертурбативно эквивалентна исходной лоренц-ковариантной теории в пределе снятия регуляризации.

Предлагается следующий лагранжиан:

$$L = L_0 + L_I \tag{III.7}$$

$$\begin{aligned} L_0 = -\frac{1}{4}\sum_{j=0,1}(-1)^j f_j^{a,\mu\nu}\left(1+\frac{\partial_\parallel^2}{\Lambda_j^2}-\frac{\partial_\perp^2}{\Lambda^2}\right) f^a_{j,\mu\nu} + \\ +\sum_{l=0}^{3}\frac{1}{v_l}\bar{\psi}_l\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - M_l\right)\psi_l \end{aligned} \tag{III.8}$$

$$\begin{aligned} L_I = c_0\partial_\mu A^a_\nu\partial^\mu A^{a,\nu} + c_1\partial_\mu A^{a,\mu}\,\partial_\nu A^{a,\nu} + \\ +c_2 A^a_\mu A^{a,\mu} + c_3 f^{abc}A^a_\mu A^b_\nu\partial^\mu A^{c,\nu} + \\ +A^a_\mu A^b_\nu A^c_\gamma A^d_\delta\left(c_4 f^{abe}f^{cde}g^{\mu\gamma}g^{\nu\delta} + \delta^{ab}\delta^{cd}\left(c_5 g^{\mu\gamma}g^{\nu\delta} + c_6 g^{\mu\nu}g^{\gamma\delta}\right)\right) + \\ +c_7\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - c_8\bar{\psi}\psi - c_9 A^a_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\lambda^a}{2}\psi \end{aligned} \tag{III.9}$$

где

$$f^a_{j,\mu\nu} = \partial_\mu A^a_{j,\nu} - \partial_\nu A^a_{j,\mu}, \qquad \frac{1}{\Lambda_j^2} = \begin{cases} 1/\Lambda^2, & j=0, \\ 1/\Lambda^2 + 1/\mu^2, & j=1, \end{cases} \tag{III.10}$$

$$v_0 = 1, \quad \sum_{l=0}^{3} v_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{3} v_l M_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{3} v_l M_l^2 = 0, \tag{III.11}$$

$$A^a_\mu = \sum_{j=0,1} A^a_{j,\mu}, \quad \psi = \sum_{l=0}^{3}\psi_l \tag{III.12}$$

Здесь $\partial_\parallel^2 = 2\partial_+\partial_-$, $\partial_\perp^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, γ^μ – матрицы Дирака, λ^a – матрицы фундаментального представления калибровочной группы $SU(3)$,

$$\mathrm{Tr}\lambda^a = 0, \quad \lambda^a\lambda^b = if^{abc}\lambda^c + d^{abc}\lambda^c + \frac{2}{3}\delta^{ab}, \quad \mathrm{Tr}(\lambda^a\lambda^b) = 2\delta^{ab}. \tag{III.13}$$

Считаем, что поля $A^a_{j,\mu}$ ограничены условием:

$$A^a_{j,-} = 0. \tag{III.14}$$

До снятия регуляризации это условие нельзя считать фиксацией калибровки, так как калибровочная инвариантность нарушена. Но при снятии регуляризации оно превращается в калибровочное условие. Кроме того с самого начала вводим обрезание всех полей по импульсам k_- и $k_\perp$:

$$\varepsilon \leq |k_-| \leq V, \qquad v^2 \leq k_\perp^2 \leq V^2. \tag{III.15}$$

Заметим, что это обрезание, равно как и условие (III.14), исключает определенные степени свободы непосредственно в лагранжиане, причем такая процедура не ведет к появлению новых связей в каноническом формализме, поскольку по исключенным степеням свободы варьирование не ведется. Обрезание, обусловленное вторым условием (III.15), как и первым, будет сниматься быстрее, чем лоренц-инвариантная УФ регуляризация (в соответствии со сказанным ранее).

Величины ε, Λ, μ, v, V и M_1-M_3 являются параметрами регуляризации, а коэффициенты c_0-c_9 – перенормировочными константами, т. е. они представляют собой функции параметров регуляризации и разлагаются в ряды по константе связи g, причем для c_3 и c_9 разложение начинается с g (с коэффициентом "1"), а для остальных – с g^2 или выше. Выражение (III.9) содержит обычное взаимодействие КХД и все дополнительные слагаемые, необходимые для перенормируемости в предположении сохранения лоренц-инвариантности и глобальной калибровочной инвариантности, но без сохранения локальной калибровочной инвариантности. Контрчлены, компенсирующие нарушение лоренц-инвариантности не появляются в связи с упомянутой последовательностью снятия регуляризации.

Докажем, что данному лагранжиану отвечает гамильтониан в к. с. ф., который при некоторой зависимости перенормировочных констант от параметров регуляризации порождает в рамках теории возмущений по константе связи g функции Грина полей $A^a_{0,\mu}$, $\bar\psi_0$ и ψ_0, совпадающие в каждом порядке по g в пределе снятия регуляризации (по специальному рецепту) с функциями Грина обычной КХД (перенормированной в лоренцевых координатах с использованием размерной регуляризации). Получение канонического гамильтониана в к. с. ф., соответствующего приведенному лагранжиану, описано в пункте 4.

3. Сравнение светоподобной и лоренцевой теорий возмущений

Будем понимать везде под результатом теории возмущений набор функций Грина для полей $A^a_{0,\mu}$, $\bar{\psi}_0$ и ψ_0, найденных методом возмущений по константе связи g, а поля $A^a_{1,\mu}$, $\bar{\psi}_l$ и ψ_l при $l = 1, 2, 3$ будем считать вспомогательными. Покажем, что гамильтониан (III.34) при некоторой зависимости от Λ входящих в него коэффициентов $c_0, \ldots, c_9$ порождает теорию возмущений, совпадающую в пределе снятия регуляризации с перенормированной теорией возмущений, которая получается из обычного лагранжиана КХД в калибровке $A_- = 0$ при использовании предписания Мандельстама-Лейббрандта с помощью размерной регуляризации (далее – "обычная" теория возмущений). О перенормировке "обычной" теории возмущений см. [38, 39]. Регуляризация снимается следующим образом: сначала $V \to \infty$, потом $\varepsilon \to 0$, затем $\Lambda \to \infty$, а M_1, M_2, M_3, μ и v считаются функциями Λ, такими, что $M_1, M_2, M_3 \to \infty$, $\mu \to 0$ и $v \to 0$ при $\Lambda \to \infty$. Две последние функции нужно подчинить более точным ограничениям: $v > \mu$ (это условие используется при построении гамильтониана) и $\mu\Lambda, v\Lambda \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (такие ограничения получены ниже в процессе рассуждений).

Перепишем свободную часть (III.8) лагранжиана в виде, удобном для анализа теории возмущений

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_{j=0,1}(-1)^j A^a_{j,\mu}\left(1 + \frac{\partial_\parallel^2}{\Lambda_j^2} - \frac{\partial_\perp^2}{\Lambda^2}\right)\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu\right)A^a_{j,\nu} + \\ + \sum_{l=0}^{3}\frac{1}{v_l}\bar{\psi}_l\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - M_l\right)\psi_l, \qquad \text{(III.16)}$$

и выделим из (III.9) часть, соответствующую обычному взаимодействию

$$L'_I = gf^{abc}A^a_\mu A^b_\nu \partial^\mu A^{c,\nu} -$$
$$-\frac{g^2}{4}f^{abe}f^{cde}A^a_\mu A^b_\nu A^{c,\mu}A^{d,\nu} - gA^a_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2}\psi. \qquad \text{(III.17)}$$

Будем считать, что оставшаяся часть (III.9) (в которой все коэффициенты разлагаются в ряды по g, начинающиеся с члена, содержащего g^2) состоит из перенормировочных контрчленов, т. е. служит для сокращения расходимостей, возникающих по теории возмущений в пределе $\Lambda \to \infty$. Использованные обозначения и предполагаемые дополнительные условия даны в формулах (III.10)-(III.15) и после них.

Запишем выражения для пропагаторов полей $A^a_{j,\mu}$ и ψ_l в импульсном пространстве, следующее из (III.16)

$$\Delta^{ab}_{j,\mu\nu} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2+i0}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k_-}\right)\frac{(-1)^j}{1-\frac{k_\parallel^2}{\Lambda_j^2}+\frac{k_\perp^2}{\Lambda^2}-i0}, \qquad \text{(III.18)}$$

$$\Delta^\psi_l = iv_l\frac{\gamma^\mu k_\mu + M_l}{k^2 - M_l^2 + i0}, \qquad \text{(III.19)}$$

где $n_+ = 1$, $n_-, n_\perp = 0$.

Так как во взаимодействии (III.9) поля $A^a_{j,\mu}$ и ψ_l всегда входят в виде сумм A^a_μ и ψ, в диаграммы тоже всегда будут входить суммы пропагаторов $\Delta^{ab}_{\mu\nu} \equiv \sum_j \Delta^{ab}_{j,\mu\nu}$ и $\Delta^\psi \equiv \sum_l \Delta^\psi_l$, как при регуляризации Паули-Вилларса. После того, как все диаграммы записаны в терминах суммарных пропагаторов, для произвольной диаграммы можно взять предел $V \to \infty$ (т. е. снять ограничения $|k_-| \le V$ и $k_\perp^2 \le V^2$), так как с учетом условий (III.11) пропагатор Δ^ψ убывает достаточно быстро, а достаточно быстрое убывание пропагаторов (III.18) обеспечивается конечностью величины Λ, и интегралы сходятся. Далее считаем, что предел $V \to \infty$ уже взят, а все другие параметры регуляризации пока конечны.

Выражение для суммарного пропагатора $\Delta^{ab}_{\mu\nu}$ имеет вид

$$\Delta^{ab}_{\mu\nu} = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2+i0}\left(\frac{k_\parallel^2}{k_\parallel^2 - \hat{\mu}^2 + i0}g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu}{k_\parallel^2 - \hat{\mu}^2 + i0}2k_+\right)R, \qquad \text{(III.20)}$$

где

$$\hat{\mu}^2 = \mu^2 \frac{\Lambda^2 + k_\perp^2}{\Lambda^2 + \mu^2}, \quad R = \frac{1}{\left(1 - \frac{k^2}{\Lambda^2} - i0\right)\left(1 + \frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)}. \qquad \text{(III.21)}$$

Заметим, что в силу принятого условия $\mu \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при снятии обрезания ($\Lambda \to \infty$) будет $\hat{\mu} \to 0$, и пропагатор приобретает обычный вид. Также заметим, что в терминах пропагатора $\Delta^{ab}_{\mu\nu}$ и при использовании вершин из (III.17) получается тот же набор диаграмм Фейнмана, что и в "обычной" теории возмущений.

Легко видеть, что пока Λ конечно, в теории возмущений, построенной с помощью рассматриваемого лагранжиана, нет УФ расходимостей. Используя этот факт, а также условие $k_\perp^2 \geq v^2$ (см. (III.15)), можно применить метод, изложенный в главе I и показать, что для исправления канонического гамильтониана достаточно добавить один контрчлен, что эквивалентно переопределению коэффициента c_2 в лагранжиане. Это показано в приложении 1. После этого теория в к.с.ф. оказывается эквивалентной теории в лоренцевых координатах, в которой остаются конечными все параметры регуляризации, кроме ε и V (причем $\varepsilon = 0$ и $V = \infty$). Таким образом достаточно доказать, что в пределе $\Lambda \to \infty$ теория возмущений с суммарными пропагаторами $\Delta^{ab}_{\mu\nu}$ и Δ^{ψ}, взаимодействием (III.9) и снятыми ограничениями $\varepsilon \leq |k_-| \leq V$, $k_\perp^2 \leq V^2$, совпадает с "обычной" теорией возмущений. Подчеркнем, что теперь все вычисления можно вести в лоренцевых координатах, а, значит, можно осуществить поворот Вика и перейти к вычислению диаграмм к евклидовом пространстве (заметим, что расположение полюсов пропагаторов (III.20) позволяют это сделать).

Пропагатор (III.20) отличается от пропагатора "обычной" теории возмущений, во-первых, множителем R, осуществляющим УФ регуляризацию, во-вторых, наличием величины $\hat{\mu}$, которая стремиться к нулю при $\Lambda \to \infty$ и, в-третьих, условием $k_\perp^2 \geq v^2$, причем $v \to 0$ при $\Lambda \to \infty$.

Проанализируем, как будет вести себя произвольная диаграмма Фейнмана, когда $\mu \to 0$ и $v \to 0$ (при конечном Λ). В этом случае в диаграмме могут появляться существенные ИК расходимости (существенные в том смысле, что они возникают не при специальных значениях внешних импульсов, а при любых). Если такая расходимость не появляется, то при исследовании предела $\Lambda \to 0$ для произвольной диаграммы, можно сразу положить $\hat{\mu} = 0$ и считать, что $v = 0$ в ее подынтегральном выражении. Точнее, при этом ошибка, присущая подынтегральному выражению будет содержать множитель $\hat{\mu}^2$, а так как УФ расходимость исходной диаграммы не более чем квадратична и, значит, после выделения множителя $\hat{\mu}^2$ будет не более, чем логарифмической, причем $\hat{\mu}^2 \sim \mu^2(1 + k_\perp^2/\Lambda^2)$, то условие убывания ошибки будет $\mu^2 \ln \Lambda \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$. При этом не учитывается возможное появление увеличение ИК расходимости в результате выделения множителя $\hat{\mu}^2$ из упомянутой ошибки. Это выделение увеличивает степень ИК расходимости на 2 и, так как расходимости ранее не было, то она становится не более чем первой степени, т. е. интегрирование этой ошибки будет давать (с учетом множителя $\hat{\mu}^2$) порядок $\hat{\mu}$. Значит, интегрирование по остальным переменным породит УФ расходимость не более чем линейную. Следовательно, условие убывания ошибки будет $\mu\Lambda \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Аналогичные рассуждения дают условие $v\Lambda \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$.)

Анализ возникновения существенных ИК расходимостей при $\mu, v \to 0$ сделан в приложении 2. Выясняется, что такая расходимость появляется только в одном случае: для слагаемых диаграммы, содержащих множитель

$$\Delta_{+\mu} G^{\mu\nu} \Delta_{\nu\alpha}, \tag{III.22}$$

где $G^{\mu\nu}(k)$ – произвольная 1-неприводимая двухвостая поддиаграмма, а Δ – пропагаторы. Причем расходимость имеет место только когда индекс μ в формуле (III.22) принимает значения $1, 2$, и расходимость всей диаграммы при этом логарифмическая: $(\ln \mu)^N$, где N не превышает числа множителей вида (III.22).

Понятно, почему наличие такой расходимости не порождает проблем в "обычной" теории возмущений, когда

$G^{\mu\nu}(k) = G^{\mu\nu}_{dim}(k)$ вычисляется калибровочно-инвариантным образом с помощью размерной регуляризации. В выражении (III.22) при $\mu = " - "$ первый пропагатор обращается в ноль и, кроме того, $g_{++} = g_{+\perp} = 0$, следовательно, в нем нужно учитывать только слагаемое, содержащее сумму $(k_+ n_\mu + k_\mu n_+)$, первый член которой не дает расходимости, так как $n_1 = n_2 = 0$, а второй дает $k_\mu G^{\mu\nu}(k)$, что равно нулю из-за тождеств Уорда (аналогичных приведенным в работе [42]), которые являются следствием точного выполнения калибровочной инвариантности. Из приведенных рассуждений ясно, что нарушение калибровочной инвариантности без одновременной регуляризации существенных ИК расходимостей делает теорию возмущений бессмысленной. В нашем случае такая регуляризация осуществляется введением величины μ.

Мы хотим доказать по индукции, от низших порядков теории возмущений по числу петель к высшим, что при некотором выборе в каждом порядке коэффициентов при контрчленах в (III.9), значение каждой диаграммы Фейнмана стремиться при $\Lambda \to \infty$ к ее обычному значению, вычисленному с использованием размерной регуляризации. Ясно, что в однопетлевом порядке поддиаграмм быть не может, поэтому существенных ИК расходимостей нет. Тогда при рассмотрении диаграммы, содержащей множитель (III.22) для поддиаграммы $G^{\mu\nu}(k)$ (которая имеет более низкий порядок, чем вся диаграмма), дающей вклад в функцию Грина, уже будет известно, что

$$G^{\mu\nu}(k) - G^{\mu\nu}_{dim}(k) = O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \tag{III.23}$$

при $\mu, \nu \neq " - "$ (именно такая оценка будет получена в приложении 4).

Так как в выражение (III.22) не дает вклада величина $G^{\mu\nu}(k)$ при $\mu = " - "$ или $\nu = " - "$, то, учитывая (III.23), можно утверждать, что с точностью до $O\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$ выражение (III.22) совпадает с

$$\Delta_{+\mu} G^{\mu\nu}_{dim} \Delta_{\nu\alpha}, \tag{III.24}$$

где, как уже говорилось, расходимость отсутствует.

Следовательно, если $(\ln \mu)^N/\Lambda \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то в пределе $\Lambda \to \infty$ диаграммы, содержащие множитель вида (III.22), не будут отличаться от от их значений в в "обычной" теории возмущений, вычисленных с помощью размерной регуляризации. (Точнее, возможна разница из-за расходимости диаграммы, но она полиномиальна, и компенсируется контрчленами того же вида, что возникают при перенормировке.) Таким образом, нам теперь достаточно доказать,что в пределе $\Lambda \to \infty$ теория возмущений в евклидовом пространстве с пропагатором (III.20), в котором положено $\mu = 0$, с пропагатором Δ^{ψ}, взаимодействием (III.9) и снятыми ограничениями (III.15), совпадает с "обычной" теорией возмущений.

Заметим, что пропагатор (III.20) с $\mu = 0$ отличается от "обычного" пропагатора только лоренц-инвариантным множителем R, а, значит, тоже является лоренц-инвариантным, если считать, что вектор n^{μ} (вообще говоря, в евклидовом пространстве комплексный) преобразуется при преобразовании Лоренца как положено, а находящаяся в знаменателе пропагатора величина k_{-} есть $k_{\mu}n^{\mu}$. (Интересно, что в евклидовом пространстве нет других выделенных векторов, кроме n^{μ}, несмотря на то, что в псевдоевклидовом пространстве предписание Мандельстама-Лейббрандта дополнительно выделяет поверхность $k_{+} = 0$.) Лагранжиан взаимодействия (III.9) также лоренц-инвариантен, следовательно, контрчлены, которые нужно добавлять к лагранжиану в процессе перенормировки в каждом порядке теории возмущений будут лоренц-инвариантны. В принципе, они могут зависеть от n^{μ} (но не от комплексно-сопряженной величины $n^{*\mu}$, см. вывод в конце приложения 4). Однако, существует симметрия относительно умножения вектора n^{μ} на положительное число (см. (III.20), где следует положить $\mu = 0$ и k_{-} в знаменателе второго слагаемого в скобках заменить на $k_{\mu}n^{\mu}$; см. также, вывод в конце приложения 4), поэтому зависимости от n^{μ} нет, так как контрчлены полиномиальны по полям и импульсам (см. приложение 4), $n_{\mu}n^{\mu} = 0$, а n^{μ} в числителе стоять не может, так как мы рассматриваем диаграммы Фейнмана для функций Грина, внешние линии которых не могут нести верхний индекс "$-$", поскольку это дает ноль при свертке с пропагаторами. Очевидно, что контрчлены будут обладать также глобальной калибровочной инвариантностью, т. к. ей обладает исходный лагранжиан. Проанализируем возможный вид контрчленов.

Существуют логарифмически расходящиеся диаграммы с четырьмя глюонными хвостами. В приложении 3 показано, что структура такой произвольной диаграммы по значкам калибровочной группы может быть только $f^{abe}f^{cde}$ или $\delta^{ab}\delta^{cd}$. Учитывая лоренц-инвариантность, заключаем, что общий вид соответствующих контрчленов исчерпывается слагаемыми с коэффициентами $c_4 - c_6$ в (III.9), а, значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором этих коэффициентов.

Еще существуют расходящиеся диаграммы с тремя глюонными хвостами. Они, вообще говоря, могут расходиться линейно, но т. к. из-за лоренц-инвариантности расходящаяся часть должна содержать множитель k^μ, то на самом деле расходимость логарифмическая. В приложении 3 показано, что структура такой произвольной диаграммы по значкам калибровочной группы может быть только f^{abc}, что дает для общего вида расходимости слагаемое с коэффициентом c_3 в (III.9), а, значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором этого коэффициента. Еще существуют логарифмически расходящиеся диаграммы с двумя фермионными и одним глюонным хвостами. Очевидно, что общий вид расходимости дается слагаемым с коэффициентом c_9 в (III.9), и, значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором этого коэффициента.

Далее, существуют расходящиеся диаграммы с двумя глюонными хвостами. Они расходятся квадратично и общий вид расходимости дается слагаемым с коэффициентом c_2 в (III.9). Но после вычитания квадратичной, может остаться линейная расходимость. На самом деле, из-за лоренц-инвариантности ее нет, а есть только логарифмическая. Очевидно, что общий вид этой расходимости дается слагаемыми с коэффициентами c_0,c_1 в (III.9), и, значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором коэффициентов c_0-c_2. Еще существуют расходящиеся диаграммы с двумя фермионными хвостами. Они расходятся линейно, и общий вид расходимости дается слагаемым с коэффициентом c_8 в (III.9). Но после вычитания линейной, может остаться логарифмическая расходимость. Очевидно, что общий вид этой расходимости дается слагаемым с коэффициентом c_7 в (III.9), и, значит, добавление контрчленов можно заменить определенным выбором коэффициентов c_7,c_8.

Заключаем, что теория возмущений с пропагатором (III.20), в котором положено $\mu = 0$, с пропагатором Δ^{ψ}, взаимодействием (III.9) и снятыми ограничениями (III.15), (такую теорию возмущений мы должны сравнивать с "обычной") перенормируема путем перенормировки коэффициентов c_0-c_9. Понятно, что правильно подбирая добавки к величинам c_0-c_9 в каждом порядке теории возмущения, т. е. распоряжаясь конечными ренормировками, можно добиться совпадения в пределе $\Lambda \to \infty$ значения каждой диаграммы Фейнмана с ее "обычным" значением (показывающая это схема рассуждений приведена в приложении 4). Это мы и стремились доказать.

Таким образом, доказано, что гамильтониан в к. с. ф., соответствующий лагранжиану (III.7), при некоторой зависимости его коэффициентов от параметров регуляризации порождает в рамках теории возмущений по константе связи g функции Грина полей $A^a_{0,\mu}$, $\bar{\psi}_0$ и ψ_0, совпадающие в каждом порядке по g в пределе снятия регуляризации по указанному рецепту с функциями Грина обычной КХД (перенормированной в лоренцевых координатах с использованием размерной регуляризации).

4. Канонический гамильтониан в координатах светового фронта

Разовьем канонический формализм в к. с. ф. для теории с лагранжианом (III.7)-(III.9) на классе полей, удовлетворяющих условию $A^a_{j,-} = 0$ и подвергнутых обрезанию по импульсам согласно формуле (III.15). Прежде всего, преобразуем часть лагранжиана, содержащую производные от фермионных полей ψ, записав ее в виде диагонализованной билинейной формы:

$$\sum_{l=0}^{3} \frac{1}{v_l} \bar{\psi}_l i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_l + c_7 \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \sum_{l,l'=0}^{3} B_{ll'} \bar{\psi}_l i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{l'} =$$

$$= \sum_{l=0}^{3} \frac{1}{w_l} \bar{\psi}'_l i\gamma^\mu \partial_\mu \psi'_l, \tag{III.25}$$

где

$$\psi_l = \sum_{l'=0}^{3} U_{ll'} \psi'_{l'}, \tag{III.26}$$

причем $1/w_l$ – собственные числа матрицы $B_{ll'}$, а $U_{ll'}$ – матрица преобразования, диагонализующего $B_{ll'}$.

Используем следующее представление для биспиноров ψ'_l и матриц γ^μ:

$$\psi'_l = \begin{pmatrix} \psi'_{l+} \\ \psi'_{l-} \end{pmatrix},$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} -i\sigma_k & 0 \\ 0 & i\sigma_k \end{pmatrix}. \tag{III.27}$$

Здесь и далее индекс k пробегает значения $1, 2$. Часть уравнения Дирака, которая получается варьированием по $\psi'^{\,+}_{l-}$, не содержащая производных по x^+, есть связь, с помощью которой можно выразить ψ'_{l-} через остальные переменные:

$$\psi'_{l-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_-^{-1} Y_l, \tag{III.28}$$

где

$$Y_l = -\hat{\partial}_\perp \psi'_{l+} +$$
$$+ w_l \sum_{l'=0}^{3} (U^{-1})_{ll'} \left(\frac{1}{v_{l'}} M_{l'} \psi_{l'+} + c_8 \psi_+ - i c_9 \hat{A}^a_\perp \frac{\lambda^a}{2} \psi_+ \right), \qquad \text{(III.29)}$$

а ψ_+, в свою очередь, выражается через ψ'_{l+} по формулам (III.12) и (III.26), и введено обозначение $\hat{O}_\perp \equiv O_k \sigma_k$. Подставим выражение (III.28) в лагранжиан (III.7)-(III.9). После этого он зависит только от переменных $A^a_{j,\mu}$, ψ'_{l+}.

Избавимся в лагранжиане от вторых производных по времени $\partial^2_+ A^a_{j,k}$ путем интегрирования по частям, после чего найдем импульсы, сопряженные с $A^a_{j,k}$:

$$\Pi^a_{j,k} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_+ A^a_{j,k})} =$$
$$= \frac{(-1)^j}{\Lambda_j^2} \Big[4\partial_-^2 \partial_+ A^a_{j,k} - 2\partial_k \partial_-^2 A^a_{j,+} + \Lambda_j^2 \left(1 - \frac{\partial_\perp^2}{\Lambda^2} \right) \partial_- A^a_{j,k} +$$
$$+ \left(-\partial_\perp^2 \delta_{kk'} + \partial_k \partial_{k'} \right) \partial_- A^a_{j,k'} \Big] - 2c_0 \partial_- A^a_k. \qquad \text{(III.30)}$$

Если определить аналогично импульс, сопряженный с $A^a_{j,+}$, то получится связь второго рода. Заметим, что из-за наличия в лагранжиане дополнительных производных $A^a_{j,+}$ не является, как обычно, множителем Лагранжа. С помощью преобразования Лежандра по переменным $\partial_+ A^a_{j,k}$, $\Pi^a_{j,k}$, не затрагивающего $\partial_+ A^a_{j,+}$, перейдем к лагранжиану первого порядка. Этот лагранжиан будет зависеть от производных $\partial_+ \psi'_l$, $\partial_+ A^a_{j,+}$ и $\partial_+ A^a_{j,k}$ только линейно (от $\partial_+ \psi'_l$, $\partial_+ A^a_{j,+}$ – линейно с самого начала). Перейдем, далее, к новым переменным, играющим роль операторов рождения и уничтожения с помощью формул типа преобразования Фурье таким образом, чтобы удовлетворить следующим условиям. Во-первых, часть лагранжиана, содержащая производные по x^+, должна иметь стандартный канонический вид. Это автоматически решает упомянутую связь для переменной $A^a_{j,+}$. Во-вторых, из возникающего гамильтониана должна достаточно просто выделяться положительно определенная свободная часть, диагональная в соответствующем фоковском пространстве.

Следующая замена удовлетворяет этим условиям:

$$A^a_{j,k}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\varepsilon\le|p_-|\le V}dp_-\int\limits_{v^2\le p_\perp^2\le V^2}d^2p_\perp\sum_{r=0,1}\frac{a^a_{jr,k}(p)e^{-ipx}+h.c.}{\sqrt{2\omega_j}},$$

$$\Pi^a_{j,k}(x)=\frac{-i}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\varepsilon\le|p_-|\le V}dp_-\int\limits_{v^2\le p_\perp^2\le V^2}d^2p_\perp\Biggl\{\Biggl(\sum_{r=0,1}\Bigl[(-1)^r\sqrt{\frac{\omega_j}{2}}\delta_{kk'}+$$

$$+(-1)^j\Lambda^{-2}\bigl(1+\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\bigr)^j\frac{p_-}{\sqrt{2\omega_j}}p_kp_{k'}\Bigr]a^a_{jr,k'}(p)+$$

$$+i(-1)^j\Lambda^{-1}\bigl(1+\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\bigr)^{j/2}\sqrt{2p_-}p_ka^a_{j,+}(p)\Biggr)e^{-ipx}-h.c.\Biggr\},$$

$$A^a_{j,+}(x)=\frac{i\Lambda_j}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\varepsilon\le|p_-|\le V}dp_-\int\limits_{v^2\le p_\perp^2\le V^2}d^2p_\perp\frac{a^a_{j,+}(p)e^{-ipx}-h.c.}{\sqrt{2p_-^3}}+$$

$$+\partial_-^{-1}\partial_kA^a_{j,k},$$

$$\psi'^i_{l+,s}(x)=\frac{2^{-1/4}}{(2\pi)^{3/2}}\times$$

$$\times\int\limits_{\varepsilon\le|p_-|\le V}dp_-\int\limits_{v^2\le p_\perp^2\le V^2}d^2p_\perp\left(b^i_{l,s}(p)e^{-ipx}+{d^i_{l,s}}^+(p)e^{ipx}\right),\qquad\text{(III.31)}$$

где $\omega_j=p_-\left|1-jp_\perp^2/\mu^2\right|$, $O(p)\equiv O(p_-,p_\perp)$, $px\equiv p_-x^-+p_kx^k$, индекс s нумерует спинорные компоненты ($s=1,2$), а i – индекс фундаментального представления цветной группы.

Все операторы рождения и уничтожения определены при $p_-\ge\varepsilon$, причем предполагается, что в написанных формулах $v>\mu$.

Полученный лагранжиан имеет вид:

$$L=i\int\limits_{\varepsilon\le|p_-|\le V}dp_-\int\limits_{v^2\le p_\perp^2\le V^2}d^2p_\perp\Biggl\{-\sum_{j,a}(-1)^j{a^a_{j,+}}^+(p)\dot a^a_{j,+}(p)+$$

$$+\sum_{j,r,a,k}(-1)^r{a^a_{jr,k}}^+(p)\dot a^a_{jr,k}(p)+$$

$$+\sum_{l,i}\frac{1}{w_l}\left(b_l^{i+}(p)\dot{b}_l^i(p)+d_l^{i+}(p)\dot{d}_l^i(p)\right)\Bigg\}-H, \qquad \text{(III.32)}$$

где $H=P_+$ – гамильтониан.

В соответствии с этим должны выполняться (анти)перестановочные соотношения:

$$\begin{aligned}
&[a^a_{jr,k}(p),a^{a'}_{j'r',k}(p')]=[a^a_{jr,k}(p),a^{a'}_{j'}(p')]=\\
&\qquad\qquad=[a^a_{jr,k}(p),a^{a'+}_{j'}(p')]=[\tilde{a}^a_j(p),a^{a'}_{j'}(p')]=0,\\
&[a^a_{jr,k}(p),a^a_{j'r',k'}{}^+(p')]=(-1)^r\delta^{aa'}\delta_{jj'}\delta_{rr'}\delta_{kk'}\delta(p_--p'_-)\delta^{(2)}(p_\perp-p'_\perp),\\
&[a^a_{j,+}(p),a^a_{j',+}{}^+(p')]=-(-1)^j\delta^{aa'}\delta_{jj'}\delta(p_--p'_-)\delta^{(2)}(p_\perp-p'_\perp),\\
&\{b^i_{l,s}(p),b^{i'}_{l',s'}{}^+(p')\}=\{d^i_{l,s}(p),d^{i'}_{l',s'}{}^+(p')\}=\\
&\qquad\qquad=w_l\delta^{ii'}\delta_{ll'}\delta_{ss'}\delta(p_--p'_-)\delta^{(2)}(p_\perp-p'_\perp). \qquad \text{(III.33)}
\end{aligned}$$

Заметим, что отрицательные знаки в правой части (анти) коммутационных соотношений отвечают степеням свободы, несущим отрицательную метрику в пространстве состояний, а соответствующие операторы являются "духовыми".

В отличие от обычного канонического формализма в к. с. ф., данный формализм не содержит связей, уменьшающих вдвое число фурье-компонент полей $A^a_{j,k}$. Чтобы при этом сохранить везде положительность импульса p_-, пришлось удвоить число операторов рождения и уничтожения $a^a_{jr,k}{}^+$, $a^a_{jr,k}$, введя индекс $r=0,1$. Часть лагранжиана первого порядка, не содержащая производных по x^+, совпадает с точностью до знака с гамильтонианом $H=P_+$. Он имеет вид:

$$\begin{aligned}
H=\int dx^-\int d^2x^\perp\Bigg\{\sum_{j=0,1}(-1)^j\Bigg[\frac{1}{8}\Bigg((-1)^j\left(\partial_-^{-1}\Pi^a_{j,k}+2c_0A^a_k\right)+\\
+\frac{2}{\Lambda_j^2}\partial_k\partial_-A^a_{j,+}-\left(1-\frac{\partial_\perp^2}{\Lambda^2}\right)A^a_{j,k}+\frac{\partial_\perp^2\delta_{kk'}-\partial_k\partial_{k'}}{\Lambda_j^2}A^a_{j,k'}\Bigg)^2+\\
+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\partial_\perp^2}{\Lambda^2}\right)\left(2\partial_kA^a_{j,k}\partial_-A^a_{j,+}-\left(\partial_-A^a_{j,+}\right)^2-\right.\\
\left.-A^a_{j,k}\partial_\perp^2A^a_{j,k}-\left(\partial_kA^a_{j,k}\right)^2\right)\Bigg]+
\end{aligned}$$

$$+c_0 A_k^a \partial_\perp^2 A_k^a - \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{3} \frac{1}{w_l} Y_l^+ \partial_-^{-1} Y_l + \sqrt{2} c_9 A_+^a \psi_+^+ \frac{\lambda^a}{2} \psi_+ - L'_I \Bigg\}. \qquad \text{(III.34)}$$

Здесь L'_I обозначает выражение (III.9), в котором отброшены члены с коэффициентами c_0 и c_7-c_9; Y_l определено формулой (III.29), ψ_+ выражается через ψ'_{l+} по формулам (III.12) и (III.26); а $A^a_{j,k}$, $\Pi^a_{j,k}$, $A^a_{j,+}$, ψ'_{l+}, ${\psi'_{l+}}^+$ – через операторы рождения и уничтожения по формулам (III.31).

Оператор P_- равен

$$P_- = \int\limits_{\varepsilon \leq |p_-| \leq V} dp_- \int\limits_{v^2 \leq p_\perp^2 \leq V^2} d^2 p_\perp \, p_- \Bigg\{ \sum_{j=0,1} (-1)^j \Bigg[-{a^a_{j,+}}^+(p) a^a_{j,+}(p) + \\ + \sum_{r=0,1} (-1)^{j+r} {a^a_{jr,k}}^+(p) a^a_{jr,k}(p) \Bigg] + \\ + \sum_{l=0}^{3} \frac{1}{w_l} \Big(b_l^{i+}(p) b_l^i(p) + d_l^{i+}(p) d_l^i(p) \Big) \Bigg\}. \qquad \text{(III.35)}$$

Этот оператор положительно определен в пространстве Фока над вакуумом, для которого

$$a^a_{j,+}|0\rangle = a^a_{jr,k}|0\rangle = b^i_l|0\rangle = d^i_l|0\rangle \equiv 0. \qquad \text{(III.36)}$$

В пределе снятия регуляризации в рамках теории возмущений все духи отключаются, в том смысле, что функции Грина построенной теории стремятся к функциям Грина правильной теории, в которой духов нет. Это позволяет надеяться, что и вне рамок теории возмущений в пределе снятия регуляризации будет выполняться условие унитарности теории.

Приложение 1

Применим метод, изложенный в главе I к теории, заданной лагранжианом (III.7). Диаграммная техника строится из суммарных пропагаторов (III.20) и $\Delta^\psi = \sum_l \Delta_l^\psi$, где Δ_l^ψ определены по (III.19), а также из вершин, содержащихся в лагранжиане взаимодействия (III.9), с учетом условий $|k_-| \geq \varepsilon$, $k_\perp^2 \geq v^2$, но без учета условий $|k_-| \leq V$, $k_\perp^2 \leq V^2$, которые считаются уже снятыми. Вид пропагатора (III.20) при условии $k_\perp^2 \geq v^2$, которое эквивалентно наличию в двумерии ненулевой массы, является допустимым, в частности, неравенство $M_i^2 > 0$ выполняется. Легко видеть, что условия (I.3) также выполняются.

Будем искать, основываясь на формуле (I.29), ненулевые первичные конфигурации. Числители всех подынтегральных выражений диаграмм Фейнмана являются полиномами, следовательно $\tau > 0$, $\eta^r > 0$. Заметим, что теперь мы обращаемся со знаменателями $k_\parallel^2 - \hat{\mu}^2 + i0$ в формуле (III.20) как с обычными знаменателями Фейнмана, а не переносим их в числитель, как в равенстве (I.19), что не требуется при $\hat{\mu} \neq 0$. Внешняя глюонная линия, несущая значок "+" дает вклад "+1" в величину $\omega_-^r - \omega_+^r$. Пара внешних фермионных линий, которые соединены непрерывной фермионной линией, дает в величину $\omega_-^r - \omega_+^r$ вклад "−1" (если по значкам этой пары диаграмма пропорциональна γ^+), либо "+1" (если она пропорциональна γ^-), либо "0" (в остальных случаях). Из формулы (III.20) видно, что суммарный глюонный пропагатор П-линии, без учета множителей из вершин, дает в величину μ^r вклад "−2" (если пропагатор несет значки "$\perp\perp$"), либо "−3" (если пропагатор несет значки "$\perp+$" или "$++$"). Множители из вершин, имеющих индекс "+" дают вклад "+1" в величину μ^r. Из формулы (III.19), с учетом условий (III.11), видно, что суммарный фермионный пропагатор П-линии дает в величину μ^r вклад "−2". (Это число увеличится, если уменьшить количество дополнительных фермионных полей Паули-Вилларса, что приведет к разрушению доказательства, поэтому число дополнительных фермионных полей не может быть меньше 3-х). Анализируя эту информацию, получаем общий вид диаграмм, для которых $\sigma \leq 0$ (причем, на самом деле, $\sigma = 0$). Они изображены на рис. 14.

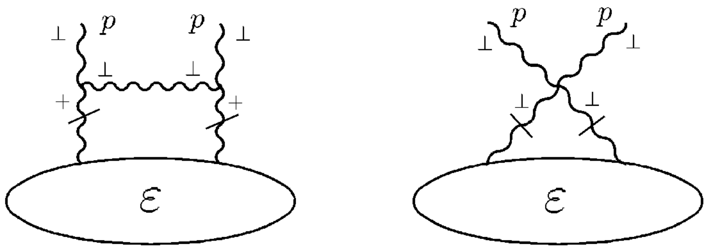

Рис. 14. Общий вид ненулевых первичных конфигураций для КХД; p – внешний импульс; символы $+$ и $\perp$ на линиях означают, что пропагатор имеет соответствующий лоренцев индекс.

Все эти конфигурации двуххвостые, а значит (см. п. I.4), вторичных конфигураций нет. Следовательно, существуют ненулевые конфигурации только первичные или аналогичные им повторные, и все они имеют указанный вид. Можно показать, что для них степень расходимости α положительна и максимум в формуле (I.25) достигается на самой диаграмме. Поэтому логарифмических поправок по ε нет, и можно легко получить зависимость найденных ненулевых конфигураций от внешних импульсов, применяя формулу (I.31). Оказывается, что после взятия предела $\varepsilon \to 0$ и интегрирования по внутренним поперечным импульсам сумма всех конфигураций вида, изображенного на рис. 14, ведет себя как

$$Cg_{AB}, \tag{III.37}$$

где C не зависит от внешних импульсов.

Таким образом, для исправления канонического гамильтониана к нему нужно добавить исправляющий контрчлен

$$A^a_\mu g^{\mu\nu} A^a_\nu, \tag{III.38}$$

что эквивалентно перенормировке коэффициента c_2 в (III.9).

Приложение 2

Проанализируем возможность возникновения существенных (т. е. имеющих место при любых значениях внешних импульсов) ИК расходимостей в диаграммах Фейнмана в евклидовом пространстве. Рассматриваем два случая: расходимости при интегрировании только по продольным импульсам (они могут появиться из-за члена пропорционального $k_+/k_\parallel^2$ в пропагаторе глюона) и расходимости при интегрировании по всем импульсам (в них дадут вклад и множители $1/k^2$ в пропагаторах).

Первый случай. Исследуем, существует ли расходимость при стремлении части (или всех) продольных петлевых импульсов к каким-либо конечным значениям. Предполагаем, что внешние импульсы не принимают специальных значений (когда сумма части их равна нулю). Пусть, кроме того, петлевые поперечные импульсы таковы, что для всех пропагаторных импульсов $Q_\perp \neq 0$ (при нарушении этого условия нужно учитывать лишние вклады от $d^2Q_\perp$ – это случай 2). Тогда расходимость может возникнуть только, если для какой нибудь глюонной линии $Q_\parallel = 0$. Порождающий возможную расходимость множитель в подынтегральном выражении имеет вид

$$\frac{Q_\mu n_\nu + Q_\nu n_\mu}{Q_\alpha n^\alpha} = -\sqrt{2}\frac{(Q_\mu n_\nu + Q_\nu n_\mu)(iQ_0 + Q_3)}{Q_0^2 + Q_3^2} \qquad \text{(III.39)}$$

и является полюсом не более, чем первого порядка. Рассмотрим точку в пространстве петлевых импульсов, в которой для некоторого набора линий $Q_\parallel = 0$. Найдем степень ИК расходимости σ. Каждая линия из указанного набора дает вклад "-1" (см. (III.39)), если она несет значки $+\perp$, или "0", если $\perp\perp$ либо $++$. Исключим из набора все линии со значками $\perp\perp$ и $++$, тогда каждая линия набора будет давать вклад "-1". Положительный вклад в σ дают дифференциалы петлевых импульсов $d^2q_\parallel$ (элементы объема интегрирования). Нужно учитывать только те петлевые импульсы, изменение которых (при фиксированных остальных) нарушает условие $Q_\parallel = 0$ для линий набора. Число таких петлевых импульсов – это число линий набора, импульсы которых можно задать произвольно, т. е. число независимых из них. Общий положительный вклад в σ будет равен этому числу, умноженному на 2. Найдем его и другие вклады в ИК расходимость.

Разорвем все линии набора. Диаграмма развалится на $n+1$ связных частей ($n = 0, 1, \ldots$). Все внешние к полной диаграмме импульсы будут присоединены к одной части (иначе внешние импульсы принимали бы специальные значения). Назовем ее выделенной, а остальные – невыделенными.

Заметим, что невыделенная часть – это поддиаграмма, и если она имеет внешние лоренцевы значки, то она должна быть пропорциональна несущим эти значки импульсам ее внешних линий. (А коэффициент пропорциональности не может давать вклад в σ из-за лоренц-инвариантности, инвариантности относительно умножения величины n^μ на положительное число и условия $Q_\perp \neq 0$.) Каждая внешняя линия, несущая значок k ($k = 1, 2$) дает множитель k^k или $g^{\mu k}$, а несущая значок $+$ – множитель k^+, где k – линейная комбинация импульсов ее внешних линий, т. е. импульсов линий набора. Поэтому каждая внешняя линия несущая значок $+$ дает в σ вклад "+1", а несущая значок k – "0". Пусть m – суммарный вклад в σ, получающийся таким образом из невыделенных частей.

Пусть s – число линий в наборе, а r – число линий набора, внешних к выделенной части. Каждая линия набора несет на одном конце значек "+", поэтому

$$m \geq s - r. \tag{III.40}$$

Число независимых линий в наборе равно $s - n$ (каждая часть (их $n+1$) дает δ-функцию, одна δ-функция является общей для всей диаграммы). По определению σ:

$$\sigma = 2(s - n) + m - s. \tag{III.41}$$

Используя (III.40), получаем

$$\sigma \geq 2(s - n) - r. \tag{III.42}$$

У каждой невыделенной части имеется минимум 2 внешние линии; значит, у всех частей (выделенной и невыделенных) вместе минимум $2n + r$ внешних линий набора. Они все соединяются друг с другом (попарно), следовательно

$$s \geq \frac{1}{2}(2n + r) = n + \frac{r}{2}, \tag{III.43}$$

откуда находим, что $\sigma \geq 0$, т. е. расходимость может быть не более, чем логарифмической. Найдем общий случай, дающий эту расходимость. В этом случае все использованные неравенства должны обращаться в равенства, т. е. $m = s - r$, и все невыделенные части – двухвостки. Общий вид такой диаграммы показан на рис. 15.

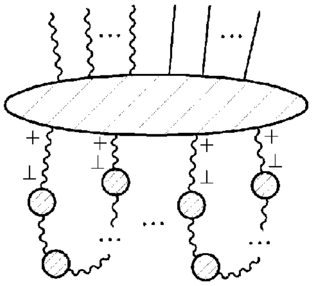

Рис. 15. Общий вид диаграммы, дающей существенную ИК расходимость в КХД. Символы + и $\perp$ на линиях означают, что пропагатор имеет соответствующий лоренцев индекс.

В этой диаграмме каждая цепочка, дающая существенную ИК расходимость, содержит множитель

$$\Delta_{+\mu} G^{\mu\nu} \Delta_{\nu\alpha}, \tag{III.44}$$

где $G^{\mu\nu}$ – ближайшая к выделенной части невыделенная часть, представляющая собой 1-неприводимую поддиаграмму, а Δ – пропагаторы линий, подходящих к последней. Причем расходимость имеет место только когда индекс μ в (III.44) принимает значения $1, 2$.

Второй случай. Теперь предполагаем, что часть 4х-мерных импульсов (или все) стремится к определенным конечным значениям. Рассуждения проводятся аналогично. Пропагатор глюона теперь дает полюс 2-ого порядка (а фермионный пропагатор полюсов не дает из-за наличия массы). Заметим, что при исследовании ИК расходимостей все фермионные линии можно заменить на $1/M$, что делает невозможным попадание M в числитель. Кроме того, в данном случае можно заменить в пропагаторе глюона R на 1 и $\hat{\mu}^2$ на μ^2, что исключает Λ из рассмотрения. Поэтому из размерных соображений следует, что каждая невыделенная часть дает вклад в σ, не менее, чем 4 минус число ее внешних хвостов (это верно также для расходящихся диаграмм, с оговоркой для двухвостки, что нужно не зависящую от импульса часть, пропорциональную $g^{\mu\nu}$, вычитать вместе с расходящейся частью, т. е. нужно в каждом порядке нормировать массу глюона на нуль; последнее не нарушает выполнения тождеств Уорда в пределе снятия регуляризации). Поэтому, теперь будет

$$\begin{gathered} m \geq 4n - (2s - r), \\ \sigma = 4(s - n) + m - 2s, \end{gathered} \tag{III.45}$$

откуда

$$\sigma \geq r > 0, \tag{III.46}$$

т. е. расходимости нет.

Приложение 3

Рассмотрим структуру по значкам глобальной калибровочной группы произвольной, имеющей три глюонных хвоста диаграммы теории возмущений, построенной на основе лагранжиана (III.7)-(III.9). Эта структура имеет вид A^{abc}. Глюонный пропагатор пропорционален δ^{ab}, тройная глюонная вершина пропорциональна f^{abc}, четверная – $f^{abe}f^{cde}$ или $\delta^{ab}\delta^{cd}$. Еще могут быть фермионные петли. Каждая фермионная петля дает множитель

$$\mathrm{Re}\mathrm{Tr}(\lambda^a \ldots \lambda^c), \tag{III.47}$$

если в петле четное число вершин, либо

$$i\mathrm{Im}\mathrm{Tr}(\lambda^a \ldots \lambda^c), \tag{III.48}$$

если нечетное (аналогично теореме Фари в КЭД). Учитываем только связанные с калибровочными значками множители.

Из (III.13) следует, что

$$\lambda^a_{\alpha\beta}\lambda^a_{\gamma\delta} = 2\left(\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\right). \tag{III.49}$$

Еще можно написать

$$\mathrm{Tr}\left(\lambda^a\lambda^b\lambda^c\right) = i2f^{abc} + 2d^{abc}, \tag{III.50}$$

откуда следует, что

$$f^{abc} = -\frac{i}{4}\left(\mathrm{Tr}\left(\lambda^a\lambda^b\lambda^c\right) - \mathrm{Tr}\left(\lambda^c\lambda^b\lambda^a\right)\right). \tag{III.51}$$

Заменим в диаграмме все величины f^{abc} правой частью формулы (III.51), а затем все появившиеся выражения вида $\lambda^a\lambda^a$ заменим согласно формуле (III.49). В результате останется только три матрицы λ, несущие три внешних значка диаграммы, эти матрицы будут соединены по своим значкам фундаментального представления друг с другом (так как после применения формулы (III.49) остаются только символы Кронекера). Т. е. A^{abc} состоит из слагаемых вида

$$\mathrm{Tr}(\lambda^a\lambda^b\lambda^c). \tag{III.52}$$

Заметим, что при применении формулы (III.51) появился множитель i^N, где N – число тройных глюонных вершин. Применение формулы (III.49) новых мнимых множителей не дает. Исходное же выражение состояло из вещественных величин δ^{ab}, f^{abc}, и величин (III.47), (III.48), первая из которых вещественна, а вторая – мнима, поэтому оно будет пропорционально $i^{N'}$, где N' – число фермионных петель с нечетным числом вершин. Легко показать, что у диаграммы с тремя глюонными хвостами величины N и N' имеют разную четность. Значит, чтобы получить согласование степеней i, необходимо, чтобы сумма выражений вида (III.52) была мнимой, откуда, используя (III.50), заключаем, что

$$A^{abc} \sim f^{abs}. \tag{III.53}$$

Теперь аналогичным образом рассмотрим структуру произвольной диаграммы с четырьмя глюонными хвостами. Она имеет вид A^{abcd}. Величина A^{abcd} будет состоять из слагаемых вида $\mathrm{Tr}(\lambda^a\lambda^b\lambda^c\lambda^d)$ и $\mathrm{Tr}(\lambda^a\lambda^b)\mathrm{Tr}(\lambda^c\lambda^d)$ (отметим, что последнее выражение явно вещественно). Легко показать, что у диаграммы с четырьмя глюонными хвостами величины N и N' имеют одинаковую четность. Поэтому сумма указанных выражений, из которых состоит A^{abcd}, должна быть вещественной. Заметим, что величину $\mathrm{Tr}(\lambda^a\lambda^b\lambda^c\lambda^d)$ можно представить как сумму ее симметризованной части (явно вещественной) и выражений вида $if^{abe}\mathrm{Tr}(\lambda^c\lambda^d\lambda^e)$. В силу условия вещественности последнее выражение должно быть суммой величин вида $f^{abe}f^{cde}$. Симметризованная же часть величины $\mathrm{Tr}(\lambda^a\lambda^b\lambda^c\lambda^d)$, как показывает прямой расчет, пропорциональна симметризованной части величины $\delta^{ab}\delta^{cd}$. Поэтому можно заключить, что A^{abcd} состоит из слагаемых вида

$$f^{abc}f^{abc} \quad \text{и} \quad \delta^{ab}\delta^{cd}. \tag{III.54}$$

Приложение 4

Покажем, что при $\mu^2 = 0$ и снятых ограничениях (III.15) процедура перенормировки лагранжиана (III.7) ведет только к изменению содержащихся в нем коэффициентов. Рассмотрим диаграмму в евклидовом пространстве, построенную из пропагатора (III.20), в котором положено $\mu = 0$, пропагатора Δ^ψ и из вершин, входящих в (III.17), при снятых ограничениях (III.15). Остальные вершины, входящие в (III.9), участвуют только в приведении к "правильному", т. е. вычисленному по размерной регуляризации, значению (в том числе в сокращении расходимости) поддиаграмм в предыдущих порядках теории возмущений. Покажем, что правильно подбирая добавки к коэффициентам в лагранжиане в каждом порядке теории возмущений, можно добиться совпадения в пределе $\Lambda \to \infty$ значения такой диаграммы Фейнмана (точнее конечной суммы диаграмм данного порядка) с ее значением, вычисленным по размерной регуляризации.

Ясно, что суммарный пропагатор фермионов можно записать в виде (в евклидовом пространстве)

$$\Delta^{\psi} = \frac{k_{\mu}\gamma^{\mu}}{k^2 + M_0^2}R' + \frac{M_0}{k^2 + M_0^2}R'', \tag{III.55}$$

где R' и R'' являются обрезающими множителями, т. е. хорошо убывают, причем $R', R'' \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Представим диаграмму в виде суммы так, чтобы каждое слагаемое содержало только один член числителя каждого фермионного пропагатора. Одно такое слагаемое можно записать в виде

$$I = \int dk F(k,p) f_{\Lambda}(k,p), \tag{III.56}$$

где dk символически обозначает все элементы объема, величина $f_{\Lambda}(k,p)$ состоит из произведения всех множителей R', R'', появляющихся в фермионных пропагаторах и всех множителей R, появляющихся из бозонных пропагаторов (III.20). Через k обозначены импульсы интегрирования, а через p – внешние импульсы диаграммы.

Очевидно, что можно найти полиномиальную по p функцию $\hat{F}(k,p)$, такую что у $\hat{F}(k,p)$ и $F(k,p)$ будут одинаковыми несколько первых членов асимптотики по k на бесконечности, так что разность $F(k,p) - \hat{F}(k,p)$ будет интегрируема (см. уточнение ниже), и $\hat{F}(k,p)$ будет лоренц-ковариантна и не будет обладать неинтегрируемыми инфракрасными особенностями. Поэтому можно написать

$$I = \int dk (F(k,p) - \hat{F}(k,p)) f_{\Lambda}(k,p) + \int dk \hat{F}(k,p) f_{\Lambda}(k,p). \tag{III.57}$$

В первом интеграле, с точностью до поправок порядка $1/\Lambda$ можно пренебречь множителем $f_{\Lambda}(k,p)$ (так как есть сходимость и без него), после чего можно считать, что этот интеграл вычисляется при размерной регуляризации, а затем разбить его на два интеграла (считая, что оба они перенормированы методом размерной регуляризации). В результате получится выражение

$$I = \int^{dim} dkF(k,p) - \int^{dim} dk\hat{F}(k,p) + \int dk\hat{F}(k,p)f_\Lambda(k,p). \quad \text{(III.58)}$$

Теперь, разложив функцию $f_\Lambda(k,p)$ в последнем интеграле в (III.58) в ряд по p в окрестности нуля (заметим, что это разложение хорошо определено при любых k), несложно показать, что последний интеграл в (III.58) представляет собой полином по p плюс поправки порядка $1/\Lambda$.

К приведенным рассуждениям необходимо сделать следующее уточнение. До того, как вычитать полную расходимость диаграммы необходимо убедиться, что она не имеет подрасходимостей по части переменных интегрирования. Такие подрасходимости могут порождаться поддиаграммами (что учитывается перенормировкой в низших порядках), либо расходимостью при интегрировании по части компонент импульса. Для КХД в калибровке $A_- = 0$ последнее возможно из-за плохого убывания пропагатора в направлении $k_\perp$. Известно [32], что указанная расходимость присутствует, если есть неотрицательный индекс УФ расходимости по части компонент. Из структуры пропагаторов видно, что в евклидовом пространстве вычитание полной расходимости может не уменьшать только индекс $\omega_\perp$ УФ расходимости по $k_\perp$, что приводит к необходимости предварительного вычитания подрасходимости по $k_\perp$, зависящей от проекций $p_\mu n^\mu$ внешних импульсов, вообще говоря, произвольным, неполиномиальным образом. Анализ диаграмм для функций Грина показывает, что $\omega_\perp \geq 0$ только для однопетлевых двухвостых диаграмм, причем $\omega_\perp = 0$. У таких диаграмм есть только один внешний импульс, следовательно, неполиномиальной зависимости от $p_\mu n^\mu$ быть не может, поскольку имеется инвариантность относительно умножения вектора n^μ на положительное число, и для диаграмм функций Грина вектор n^μ с несвернутым индексом μ не может стоять в числителе, так как это дает ноль при свертке с пропагаторами. Если бы мы рассматривали 1-неприводимые вершинные части, для диаграмм которых последнее условие отсутствует, то расходящиеся части могли бы быть неполиномиальными [38, 39], и количество расходящихся по $k_\perp$ диаграмм было бы гораздо больше.

Понятно, что при вычислении по размерной регуляризации сходящихся интегралов результат не может зависеть от величины $n^{*\mu}$, комплексно сопряженной к n^μ. (Но, в принципе, такая зависимость может появиться в процессе вычитания расходимостей с помощью размерной регуляризации, так происходит в работах [38, 39].) Отсюда, используя полиномиальность расходящихся частей, можно заключить, что результат перенормировки по размерной регуляризации расходящейся диаграммы для функции Грина представляет собой сумму полинома по импульсам с коэффициентами, зависящими от $n^{*\mu}$, и выражения, от $n^{*\mu}$ не зависящего (для этого достаточно выделить в подынтегральном выражении несколько первых членов ряда Тейлора по внешним импульсам для которых интеграл расходиться). Для соответствующей диаграммы вершинной части, не дающей вклада в функцию Грина, будет, возможно, еще прибавляться зависящее от $n^{*\mu}$ неполиномиальное слагаемое. Изменим рецепт вычитания при перенормировке с помощью размерной регуляризации диаграмм вершинных частей, дающих вклад в функции Грина так, чтобы все полиномиальные по имульсам выражения, зависящие от $n^{*\mu}$ были отнесены к контрчленам, а перенормированная диаграмма от $n^{*\mu}$ не зависела. Это можно сделать без нарушения тождеств Уорда (аналогичных приведенным в работе [42] и в данном случае линейных по диаграммам), изменив соответствующим образом вершинные части, не дающие вклада в функции Грина. Значит, первый интеграл в (III.58) не зависит от $n^{*\mu}$. Кроме того, ясно, что он обладает инвариантностью по умножению вектора n^μ на положительное число (см. выше). Явно видно, что этими же свойствами обладает I.

Отсюда следует вывод: разность между диаграммой, описанной в начале этого приложения (точнее, конечной суммой таких диаграмм данного порядка) и ее значением, вычисленным по размерной регуляризации (т. е. аналогичной суммой первых интегралов в (III.58)), с точностью до поправок порядка $1/\Lambda$ сводится к полиному по внешним импульсам, коэффициенты которого не зависят от $n^{*\mu}$ и обладают инвариантностью по умножению вектора n^{μ} на положительное число. Указанная разность может быть скомпенсирована добавкой к коэффициентам, содержащимся в выражении (III.9) в данном порядке.

Заключение

Основные результаты, полученные в работе, могут быть сформулированы в следующем виде.

1. Разработан метод построения по заданному лагранжиану гамильтониана в к. с. ф., порождающего теорию возмущений, которая совпадает во всех порядках в пределе снятия регуляризации с соответствующей ковариантной теорией возмущений. Искомый гамильтониан строится с помощью добавления к каноническому гамильтониану (который может порождать теорию возмущений, отличную от ковариантной) исправляющих контрчленов. Процедура построения исправляющих контрчленов основывается на предложенном способе нахождения всех диаграмм Фейнмана, дающих в указанном пределе вклад в разницу между функцией Грина, полученной с помощью гамильтониана в к. с. ф. и соответствующей ковариантной функцией Грина. Метод применим к широкому классу теорий, в том числе калибровочных. Полученный гамильтониан в к. с. ф. может быть использован для непертурбативного вычисления спектра связанных состояний, что актуально для теорий с сильной связью при низких энергиях.

2. Рассмотрены примеры применения предложенного метода к некалибровочным теориям. Для теории с взаимодействием типа Юкавы в четырех измерениях удалось построить гамильтониан в к. с. ф. в замкнутом виде. Результат согласуется с выводами работы [14], сделанными на основе анализа диаграммы собственной энергии во всех порядках теории возмущений и прочих диаграмм Фейнмана в низших порядках. Получен гамильтониан в к. с. ф. для скалярной теории, являющейся результатом бозонизации двумерной КЭД. Такая теория представляет собой модификацию модели синус-гордон и нетривиальна из-за наличия неполиномиального взаимодействия. Найденный гамильтониан в к. с. ф. порождает теорию возмущений, совпадающую с ковариантной теорией возмущений по массе фермиона (которая после бозонизации играет роль константы связи). Спектр этого гамильтониана должен совпадать со спектром двумерной КЭД.

3. С помощью предложенного метода построен гамильтониан в к. с. ф. для четырехмерной КХД в калибровке $A_- = 0$ (именно в этой калибровке возможна гамильтонова формулировка теории в к. с. ф.). Оказалось, что прямое применение метода к КХД (а также к теории Янга-Миллса и КЭД) в калибровке $A_- = 0$ дает гамильтониан в к. с. ф., содержащий сколь угодно высокие степени полей, что не позволяет записать его в замкнутом виде. Проблема решена с помощью введения дополнительной ИК регуляризации КХД, что дает возможность применить упомянутый метод и приводит, при специальном способе снятия регуляризации, к гамильтониану, который порождает теорию возмущений, эквивалентную ковариантной. Введенная ИК регуляризация и необходимая УФ регуляризация нарушают калибровочную инвариантность, что приводит в процессе УФ перенормировки к появлению десяти неизвестных коэффициентов в гамильтониане.

Список литературы

[1] *V. A. Fock.* Zs. f. Phys. 1932. V. 75. N. 9-10, P. 622-647; 1932. V. 76, N. 11-12, P. 852. Пер. в сб.: "Работы по квантовой теории поля", Л. Изд-во Ленингр. ун-та. 1957.

[2] *И. Е. Тамм.* Journ. Phys. (USSR) 1945. V. 9. P. 449. Пер. в сб.: "Проблемы современной физики", N. 10. ИЛ. 1955. С. 219.

[3] *S. M. Dancoff.* Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 382.

[4] *P. A. M. Dirac.* Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392.

[5] *A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze.* Nuovo cimento. 1963. V. 29. N. 2. P. 370-399.

[6] *В. Г. Кадышевский, А. Н. Тавхелидзе.* Проблемы теоретической физики. Сб. посвященный Н. Н. Боголюбову. М.: Наука. 1969. С. 261-277.

[7] *Р. Н. Фаустов.* ТМФ. 1970. Т. 3. Вып. 2. С. 240-254; Ann. of Phys. 1973. V. 78. N. 1. P. 176-189.

[8] *В. Р. Гарсеванишвили, А. Н. Квинихидзе, В. А. Матвеев и др.* ТМФ. 1975. Т. 23. Вып. 3. С. 310-321.

[9] *В. А. Карманов.* ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. Вып. 3. С. 525.

[10] *L. N. Lipatov.* Nucl. Phys. 1991. V. B365. P. 641.

[11] *E. Tomboulis.* Phys. Rev. 1973. V. D8. P. 2736-2740.

[12] *A. Cacher.* Phys. Rev. 1976. V. D14. P. 452-465.

[13] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov.* Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 437-444.

[14] *M. Burkardt, A. Langnau.* Phis. Rev. 1991. V. D44. P. 1187, 3857.

[15] *M. Burkardt.* Adv. Nucl. Phys. 1996. V. 23. P. 1.

[16] *K. G. Wilson, T. S. Walhout, A. Harindranath, W.-M. Zhang, R. J. Perry, S. D. Glazek.* Phys. Rev. 1994. V. D49. P. 6720.

[17] *B. H. Allen, R. J. Perry.* Phys. Rev. 1998. V. D58. 125017.

[18] *S. Coleman.* Phys. Rev. 1975. V. D11. P. 2088.

[19] *S. Coleman, R. Jackiw, L. Susskind.* Annals Phys. 1975. V. 93. P. 267.

[20] *S. Coleman.* Annals Phys. 1976. V. 101. P. 239.

[21] *I. Affleck.* Nucl. Phys. 1986. V. B265. P. 409.

[22] *E. V. Prokhvatilov, H. W. L. Naus, H.-J. Pirner.* Phys. Rev. 1995. V. D51. P. 2933-2943.

[23] *С. А. Пастон, В. А. Франке.* Сравнение квантово-полевой теории возмущений на световом фронте и в лоренцевых координатах. Теоретическая и математическая физика. 1997. Т. 112. N 3. С. 399-416. hep-th/9901110.

[24] *С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке.* К построению гамильтониана КХД в координатах светового фронта. Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 120. N 3, С. 417-437.

[25] *S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke.* QED_2 Light-Front Hamiltonian reproducing all orders of covariant chiral perturbation theory. Preprint SPbU-IP-99-13. hep-th/9910114.

[26] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov.* Quantum Field Theory in Light-Front coordinates, in book: Quantum Theory in honour of Vladimir A. Fock. Part 1. Unesco. St. Petersburg University. Euro-Asian Physical Society. 1998. C. 38-97. hep-th/9901029.

[27] *W.-M. Zhang, A. Harindranath.* Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 4868, 4881, 4903.

[28] *N. E. Ligterink, B. L. G. Bakker.* Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 5954.

[29] *S. Mandelstam.* Nucl. Phys. B. 1983. V. 213, P. 149.

[30] *G. Leibbrandt.* Phys. Rev. D. 1984. V. 29. P. 1699.

[31] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука. 1984.

[32] *S. Weinberg.* Phys. Rev. 1960. V. 118. P. 838.

[33] *M. Burkardt.* Phis. Rev. 1993. V. D47. P. 4628-4633.

[34] *А. М. Анненкова, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке.* Вестник СПбГУ. 1985. N 4. С. 80-83.

[35] *T. Eller, H.-C. Pauli, S. J. Brodsky.* Phys. Rev. 1987. V. D35. P. 1493-1507.

[36] *C. Adam.* Annals Phys. 1997. V 259. P. 1-63, hep-th/9704064.

[37] *E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke.* Physics of Atomic Nuclei. 1996. V. 59. P. 2105-2112.

[38] *A. Basseto, M. Dalbosko, R. Soldati.* Phys. Rev. 1987. V. D36. P. 3138.

[39] *A. Basseto, G. Nardelli, R. Soldati.* "Yang-Mills theories in algebraic non covariant gauges". World Scientific, Singapore 1991.

[40] *B. J. Warr.* Ann. of Phys. (N.Y.) 1988. V. 183. P. 1-58,59-79.

[41] *А. Н. Пронин, В. А. Франке.* Вестник СПбГУ. 1999. Сер. 4. Вып. 1 (N4). С. 18-24.

[42] *C. Acerbi, A. Basseto.* Phys. Rev. 1994. V. D49. P. 1067-1076.