Санкт-Петербургский государственный университет

Физический факультет

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц

В.А. Франке, С.Н. Манида, С.А. Пастон, Е.В. Прохватилов

Квантование гравитации I.
Подход в терминах метрического тензора

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2009

В.А.Франке, С.Н.Манида, С.А.Пастон, Е.В.Прохватилов
Квантование гравитации I. Подход в терминах метрического тензора. – СПб., 2009

Учебно-методическое пособие посвящено изложению проблемы квантования гравитационного поля. Рассматривается канонический подход к квантованию в терминах метрического тензора. Описано два варианта канонического формализма: предложенный Арновиттом, Дезером и Мизнером, и предложенный Фаддеевым и Поповым. Установлена связь между этими подходами.
Пособие предназначено для студентов 5-7-го курсов, аспирантов и соискателей, специализирующихся в области теоретической физики.

1 Введение

В данное время окончательная теория гравитации все еще не построена. Работая над этой проблемой необходимо исходить из результатов, полученных ранее. В частности нужно принимать во внимание известные методы квантования теории гравитации Эйнштейна. В настоящем учебном пособии излагаются канонические подходы к квантованию теории гравитационного поля, предложенные Арновитом, Дезером и Мизнером (АДМ) и Фаддеевым Поповым (ФП). Рассматривается лишь теория гравитационного поля, не взаимодействующего с другими полями, и в качестве исходных динамических переменных принимаются компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

2 Общие соображения, обозначения

Важнейшие особенности квантования гравитационного поля видны уже при отсутствии взаимодействия с другими полями. Поэтому рассмотрим этот случай. Начнем с приведения классической теории в каноническому виду. Если взаимодействие со спинорными полями отсутствует, то гравитацию можно описать в терминах метрики $g_{\mu\nu}$, $(\mu, \nu, ... = 0, 1, 2, 3)$ не прибегая к реперному формализму, что и делается в данном пособии. Разумеется, можно использовать также реперный формализм. Описанию такого подхода будет посвящено следующее пособие.

Итак, мы начнем с формулировки обычной теории гравитации в терминах метрики $g_{\mu\nu}$, считая, что другие поля отсутствуют. Из теории электромагнитного поля в плоском пространстве известно, что динамическими переменными при каноническом подходе являются компоненты A_i $(i = 1, 2, 3)$ потенциала, а A_0 играет роль множителя Лагранжа. Как вскоре выяснится, в случае теории гравитации в канонической форме в качестве динамических переменных можно выбрать g_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ причем g_{00} и g_{0i} оказываются функциями множителей Лагранжа. Поэтому, удобно принять сигнатуру метрики $(-+++)$, что и делаем. Будем считать, что: $c = \hbar = 1$.

Чтобы сохранить явную аналогию между напряженностью поля в калибровочной теории,

$$F_{\mu\nu}{}^{A}{}_{B} = \partial_\mu B_\nu{}^{A}{}_{B} - \partial_\nu B_\mu{}^{A}{}_{B} + B_\mu{}^{A}{}_{D} B_\nu{}^{\tilde{D}}{}_{B} - B_\nu{}^{A}{}_{D} B_\mu{}^{D}{}_{B} \tag{1}$$

и тензором кривизны $R^{\mu}{}_{\nu,\alpha\beta}$, определим этот тензор равенством:

$$R^{\alpha}{}_{\beta,\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\delta\beta} - \partial_\delta \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\rho}\Gamma^{\rho}_{\delta\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\rho}\Gamma^{\rho}_{\gamma\beta}. \tag{2}$$

Далее полагаем для тензора Ричи, скалярной кривизны и тензора Эйнштейна:

$$R_{\beta\delta} = R^{\alpha}{}_{\beta,\alpha\delta}, \quad R = g^{\beta\delta} R_{\beta\delta}, \tag{3}$$

$$G_{\beta\delta} = R_{\beta\delta} - \frac{1}{2} g_{\beta\delta} R, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= g_{\alpha\varepsilon} R^{\varepsilon}{}_{\beta,\gamma\delta} = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\alpha\partial_\delta g_{\beta\gamma} + \partial_\beta\partial_\gamma g_{\alpha\delta} - \partial_\alpha\partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\beta\partial_\delta g_{\alpha\gamma}) + g_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\delta}\Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} - g_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\rho}_{\beta\delta}. \end{aligned} \tag{5}$$

Считаем, что знак тензора энергии-имульса $T^{\mu\nu}$ таков что $T^{00} \geqslant 0$. Уравнения Эйнштейна с космологическим членом имеют вид

$$G^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\Lambda = \varkappa T^{\mu\nu}, \tag{6}$$

а действие гравитационного поля – вид

$$S_g = \frac{1}{2\varkappa} \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) + (\text{поверхностный член}), \tag{7}$$

где Λ – космологическая постоянная, $\varkappa = 8\pi\gamma$, γ – Ньютоновская постоянная. Полагаем также

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1). \tag{8}$$

3 Трехмерный тензорный анализ

Канонический формализм строится на поверхности $x^0 = const$ в некоторой системе координат. Для простоты мы выбираем поверхность $x^0 = 0$. В рамках такого подхода удобно пользоваться трехмерным тензорным анализом на этой поверхности.

Назовем трехмерным тензором (вектором, скаляром) величину $T^{i...k}_{l...m}$, $(i, k, ... = 1, 2, 3)$, которая изменяется по обычному трехмерному тензорному закону при преобразовании координат вида

$$\begin{aligned} x^0 &\longrightarrow x'^0 = x^0, \\ x^i &\longrightarrow x'^i = f'(x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \tag{9}$$

Переменная x^0 в этом преобразовании не участвует и не изменяется.

Очень полезно ввести понятие устойчивых трехмерных тензоров. Этот термин не общепринят и в литературе не встручается. Назовем трехмерный тензор устойчивым, если он изменяется по обычному трехмерному тензорному закону при любых преобразованиях координат x^μ не смещающих поверхность $x^0 = 0$, т. е. при любых преобразованиях

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{10}$$

для которых

$$f^0(0, x^1, x^2, x^3) = 0. \tag{11}$$

Предполагается, что есть обратное преобразование

$$x^\mu = \tilde{f}^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \tag{12}$$

для которого также

$$\tilde{f}^0(0, x'^1, x'^2, x'^3) = 0. \tag{13}$$

Считаем далее что:

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \geqslant 0, \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} \geqslant 0. \tag{14}$$

Отличие преобразований (10)-(13) от (5) состоит в том, что время x^0 активно участвует в преобразованиях (10)-(13) в окрестности поверхности $x^0 = 0$, хотя на самой этой поверхности верны равенства (11),(13). Это сказывается на производных $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$ на поверхности $x^0 = 0$. Из (11),(13) следует, что

$$\left.\frac{\partial x'^0}{\partial x^i}\right|_{x^0=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial x^0}{\partial x'^i}\right|_{x'^0=0} = 0. \tag{15}$$

Пусть A_μ четырехмерный ковариантный вектор, так, что при любом преобразовании координат

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} A_\alpha(x). \tag{16}$$

Считаем, что $A_\mu(x)$ при замене координат не меняется как геометрический объект, а изменяются его компоненты, согласно (16). Тогда в силу (15) мы имеем

$$A'_i(0,x'^1,x'^2,x'^3) = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^i}\right|_{x'^0=0} A_\mu(0,x^1,x^2,x^3) = \left.\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\right|_{x'^0=0} A_k(0,x^1,x^2,x^3), \tag{17}$$

т. е. $A_i(0,x^1,x^2,x^3)$ изменяется по обычному трехмерному тензорному закону. Значит $A_i|_{x^0=0}$ есть устойчивый трехмерный вектор. В то же время для четырехмерного вектора A^μ будет при преобразовании (10)-(13)

$$A'^i|_{x^0=0} = \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu}\right|_{x^0=0} A^\mu|_{x^0=0}, \tag{18}$$

что, вообще говоря, не равно $\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}|_{x^0=0}A^k|_{x^0=0}$. Поэтому A'^i не есть устойчивый трехмерный вектор, хотя это трехмерный вектор относительно преобразований (9).

Аналогично получается следующий результат. Пусть $T_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$ четырехмерный тензор имеющий только нижние индексы, причем при замене координат этот тензор не меняется как геометрический объект, а изменяются только его компоненты по обычному тензорному закону. Тогда

$$T_{i_1,i_2,\dots,i_n}|_{x^0=0} \tag{19}$$

есть устойчивый трехмерный тензор. Пусть далее A^μ – четырехмерный вектор. Тогда при преобразовании (10)-(13)

$$A'^0|_{x'^0=0} = \left.\frac{\partial x'^0}{\partial x^\mu}\right|_{x^0=0} A^\mu|_{x^0=0} = \left.\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right|_{x^0=0} A^0|_{x^0=0}, \tag{20}$$

где учтено (16).

Аналогично, при том же преобразовании

$$g'^{00}|_{x'^0=0} = \left.\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)^2\right|_{x^0=0} g^{00}\Big|_{x^0=0}. \tag{21}$$

Считая согласно (15) (в соответствии с $(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \geqslant 0)$) имеем

$$\sqrt{-g'^{00}}|_{x'^0=0} = \left.\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right|_{x^0=0} \sqrt{-g^{00}}\Big|_{x^0=0}. \tag{22}$$

Из (20),(22) следует, что при данном преобразовании

$$\left.\left(\frac{1}{\sqrt{-g'^{00}}}A'^0\right)\right|_{x'^0=0} = \left.\left(\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}A^0\right)\right|_{x^0=0} \tag{23}$$

т. е. величина $\left.\left(\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}A^0\right)\right|_{x^0=0}$ есть устойчивый трехмерный скаляр.

Аналогично получается следующий результат. Пусть $T^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_m}$ четырехмерный тензор имеющий n верхних индексов и некоторое количество нижних, причем при замене координат этот тензор не меняется как геометрический объект, а изменяются только его координаты по обычному тензорному закону. Тогда величина

$$\left(-g^{00}\right)^{\frac{n}{2}} T^{0,0,\dots,0}_{i_1,i_2,..,i_m}|_{x^0=0} \tag{24}$$

устойчивый трехмерный тензор. Имеем

$$g^{00} = \frac{\det(g_{ik})}{g} = \frac{\overset{3}{g}}{g}. \tag{25}$$

Поэтому согласно (24) при указанных там условиях

$$\left(\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{\overset{3}{g}}}\right)^n T^{0,0,\ldots,0}_{i_1,i_2,..,i_m} \tag{26}$$

есть устойчивый трехмерный тензор. В частности, конечно, трехмерный скаляр, есть также трехмерный устойчивый скаляр.

По сформулированным правилам величина

$$\beta_{ik} \equiv g_{ik}|_{x^0=0} \tag{27}$$

есть устойчивый трехмерный тензор. Эта величина представляет собой индуцированную метрику поверхности $x^0 = 0$. Поскольку метрика, обратная тензору, есть тензор, то определив величину β^{kl}, равенством

$$\beta_{ik}\beta^{kl} = \delta^l_k \tag{28}$$

получаем устойчивый трехмерный тензор (кратко, 3-тензор) β^{kl}. Очевидно δ^l_k тоже устойчивый 3-тензор. Действительно, при условиях (15)

$$\begin{aligned}\delta^i_k \equiv \left(\delta^i_k\right)' = \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu}\right|_{x^0=0} \delta^\mu_\nu \left.\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^k}\right|_{x'^0=0} = \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^\mu}\right|_{x^0=0} \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^k}\right|_{x'^0=0} = \\ = \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\right|_{x^0=0} \left.\frac{\partial x^l}{\partial x'^k}\right|_{x'^0=0} = \left.\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\right|_{x^0=0} \delta^l_m \left.\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\right|_{x^0=0},\end{aligned} \tag{29}$$

что есть тензорный закон преобразования.

Мы имеем

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu, \tag{30}$$

откуда,

$$g_{ik}g^{kl} + g_{i0}g^{0l} = \delta^l_k \tag{31}$$

или при $x^0 = 0$

$$\beta_{ik}g^{kl} + g_{i0}g^{0l} = \delta^l_k. \tag{32}$$

Согласно (30) также

$$g_{ik}g^{k0} + g_{i0}g^{00} = 0, \tag{33}$$

т. е. при $x^0 = 0$

$$\beta_{ik}g^{k0} + g_{i0}g^{00} = 0 \tag{34}$$

откуда $x^0 = 0$

$$g_{i0} = -\beta_{ik}\frac{g^{k0}}{g^{00}}. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (32), имеем

$$\beta_{ik}\left(g^{kl} - \frac{g^{k0}g^{l0}}{g^{00}}\right) = \delta^l_i \tag{36}$$

при $x^0 = 0$. Сравнивая с (28), видно, что

$$\beta^{kl} = \left(g^{kl} - \frac{g^{k0} g^{l0}}{g^{00}} \right)\Bigg|_{x^0=0} . \tag{37}$$

Равенства (27) и (37) определяют метрические тензоры поверхности $x^0 = 0$. Это устойчивые 3-тензоры. Далее тензоры β_{ik} и β^{kl} применяются для подъема и опускания индексов у 3-тензоров (если A_i – 3-вектор, то далее $A^i = \beta^{ik} A_k$, причем вообще говоря, $A^i \neq g^{im} A_m$). Форму $\beta_{ik} dx^i dx^k$ именуют первой фундаментальной формой поверхности $x^0 = 0$.

Из тензоров β_{ik} и β^{ik}, построим 3-мерные коэффициенты связности $\overset{3}{\Gamma}{}^i_{kl}$, а также тензоры $\overset{3}{R}{}^i{}_{k,lm}$, $\overset{3}{R}_{ik,lm}$, $\overset{3}{R}_{km}$, $\overset{3}{R}$ в точности так, как строятся величины $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}, R^\mu_{\gamma,\alpha\beta}$, $R_{\mu\nu,\alpha\beta}, R_{\nu,\beta}, R$ из $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$. Все величины $\overset{3}{R}{}^i{}_{k,lm}$, $\overset{3}{R}_{ik,lm}$, $\overset{3}{R}_{km}$, $\overset{3}{R}$ есть 3-тензоры. Определит 3-мерные ковариантные производные $\overset{3}{\nabla}_m$ от 3-векторов как обычно, используя связность, $\overset{3}{\Gamma}{}^i_{kl}$. Ковариантная производная $\overset{3}{\nabla}_m$ от обычного трехмерного тензора есть трехмерный тензор.

Введем теперь в рассмотрение вторую фундаментальную форму поверхности $x^0 = 0$. Рассмотрим множество поверхностей $x^0 = const$ в окрестности поверхности $x^0 = 0$ и построим поле нормированных нормалей $n^\mu(x)$, $(x = x^0, x^1, x^2, x^3)$ к этим поверхностям. Для этих нормалей

$$g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = -1, \tag{38}$$

причем мы полагаем $n^0 > 0$ и поэтому $n_0 < 0$. Условие того, что n_μ есть нормаль, таково: если dx^μ касательно к поверхности $x^0 = const$ (т. е. если $dx^0 = 0$) то $n_\mu dx^\mu = 0$. Поэтому $n_i dx^i = 0$ $\forall dx^i$ и, откуда, $n_\mu = \delta^0_\mu n_0$. Значит, в силу (38) $g^{00} n_0 n_0 = -1$, и поскольку $n_0 < 0$,

$$n_0 = -\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}, \tag{39}$$

так, что

$$n_\mu = -\delta^0_\mu \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}. \tag{40}$$

откуда,

$$n_\mu = n_\nu g^{\nu\mu} = -\frac{g^{0\mu}}{\sqrt{-g^{00}}}. \tag{41}$$

Закрепим теперь поле нормалей к поверхностям данной координатной системы и будем преобразовывать их компоненты, изменяя координатную систему по правилам (10)-(13). При этом нормали остаются нормалями к поверхностям исходной координатной системы, т. е. не меняется как геометрические объекты. При таком законе преобразования $\nabla_\mu n_\nu$ будет 4-тензором, и значит, величина

$$\nabla_i n_k|_{x^0=0} \equiv (\partial_i n_k - n_\mu \Gamma^\mu_{ik})|_{x^0=0} = (-n_0 \Gamma^0_{ik})|_{x^0=0} \tag{42}$$

будет устойчивым 3-тензором(см. (40)). Но в выражение (42) входят значение нормали n_μ только при $x^0 = 0$ (производные $\partial_0 n_\mu$ туда не входят). Поэтому величина n_μ в (42) будут преобразовывается одинаково, когда при замене координат (10)-(13) нормали остаются нормалями к поверхностям исходной системы координат, и в случае, когда они остаются нормалями к поверхностям новой системы координат. Следовательно величина $\nabla_i n_k|_{x^0=0}$ будет устойчивым 3-тензором если считать, что поле n_μ при преобразовании координат превращается в поле нормалей к новой системе координатный поверхностей. Это и подразумевается, когда мы пишем $\nabla_i n_k|_{x^0=0}$ без объяснений. Таким образом, величина

$$K_{ik} = -\nabla_i n_k|_{x^0=0} = (n_0 \Gamma^0_{ik})|_{x^0=0} = -\left(\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}\Gamma^0_{ik}\right)\Bigg|_{x^0=0} \tag{43}$$

есть устойчивый 3-тензор, причем из (43) видно, что $K_{ik} = K_{ki}$. Выражение $K_{ik}dx^i dx^k$ называется второй фундаментальной формой поверхности $x^0 = 0$.

Построить любое количество устойчивых 3-тензоров, содержащих производные по x^0 от $g_{\mu\nu}$ разных порядков, можно, используя полугеодезическую систему координат. Координатная система, в которой везде $g_{00} = -1$, $g_{0i} = 0$, называется полугеодезической (происхождение термина становится понятным из дальнейшего). Справедливо следующее предложение.

В окрестности $x^0 = 0$ всегда можно ввести полугеодезические координаты $\tilde{x}^\mu$ таким образом, что в этих новых координатах уравнение данной поверхности по прежнему будет иметь вид $\tilde{x}^0 = 0$.

Действительно, введем координаты $\tilde{x}^\mu$ положив $\tilde{x}^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Допустим, что $f^0(0, x^1, x^2, x^3) = 0$, $f^i(0, x^1, x^2, x^3) = x^i$. Примем далее, что временны́е координатные линий новой координатной системы есть геодезические линии, т. е. что они удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2\tilde{x}^\mu}{ds^2} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}\frac{d\tilde{x}^\nu}{ds}\frac{d\tilde{x}^\lambda}{ds} = 0, \tag{44}$$

где

$$s = \int \sqrt{-\tilde{g}_{\mu\nu}d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu} \tag{45}$$

вдоль линии от ее пересечения с поверхностью $\tilde{x}^0 = 0$ (т. е. $x^0 = 0$), и $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}$, $\tilde{g}_{\mu\nu}$ относятся к новой системе координат.

Пусть, далее, эти геодезические линии при $\tilde{x}^0 = 0$ (т. е. $x^0 = 0$) ортогональны поверхности $\tilde{x}^0 = 0$. Тогда при $\tilde{x}^0 = 0$

$$d_1\tilde{x}^\mu d_2\tilde{x}_\mu = 0, \tag{46}$$

где $d_1\tilde{x}^\mu$ направлено вдоль геодезической, а $d_0\tilde{x}_\mu$ принадлежит поверхности $\tilde{x}^0 = 0$. При этом $d_2\tilde{x}^0 = 0$ и $d_2\tilde{x}^i$ любое. Поскольку геодезические линии есть временные линии координатной системы, то $d_1\tilde{x}^i = 0$. Значит, (46) имеет вид

$$(d_1\tilde{x}^0\tilde{g}_{0i}d_2\tilde{x}^i)|_{\tilde{x}^0=0} = 0 \quad \forall d_2\tilde{x}^i, \tag{47}$$

причем $dx^0 \neq 0$. Поэтому будет

$$\tilde{g}_{i0}|_{\tilde{x}^0=0} = 0. \tag{48}$$

Примем далее, что

$$\tilde{x}^0 = s, \tag{49}$$

где s считается положительным по одну сторону от поверхности $\tilde{x}^0 = 0$ и отрицательным по другую, $s = 0$ при $\tilde{x}^0 = 0$, т. е. при $x^0 = 0$.

Вдоль геодезической линии будет

$$ds^2 = -\tilde{g}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = -\tilde{g}_{00} d\tilde{x}^0 d\tilde{x}^0 = -\tilde{g}_{00} ds^2, \tag{50}$$

откуда

$$\tilde{g}_{00} = -1 \tag{51}$$

везде. Из формул (44), (49) имеем

$$\frac{d^2\tilde{x}^\mu}{d\tilde{x}^{0^2}} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} \frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tilde{x}^0} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{d\tilde{x}^0} = 0. \tag{52}$$

Но $\frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tilde{x}^0} = \delta^\nu_0$ вдоль данной линии, а значит $\frac{d^2\tilde{x}^\mu}{d\tilde{x}^{0^2}} = 0$. Поэтому по (52)

$$\tilde{\Gamma}^\mu_{00} = \tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{\Gamma}_{\alpha,00} = 0 \tag{53}$$

везде, т. е. $\tilde{\Gamma}_{\alpha,00} = 0$ везде, так как $\det(\tilde{g}^{\mu\alpha}) \neq 0$. Иначе,

$$2\partial_0 \tilde{g}_{0\alpha} + \partial_\alpha \tilde{g}_{00} = 0 \tag{54}$$

везде. Согласно (51) и (54)

$$\partial_0 \tilde{g}_{0i} = 0 \tag{55}$$

везде. Из (48) и (55)

$$\tilde{g}_{0i} = 0 \tag{56}$$

везде. Таким образом, везде

$$\tilde{g}_{00} = -1, \quad \tilde{g}_{0i} = 0 \tag{57}$$

и мы построили полугеодезическую систему координат.

В силу теорем существования и единственности решения дифференциального уравнения вида (44) их координатные кривые не будут пересекаться в некоторой окрестности поверхности $x^0 = const$, если исходная метрика $g_{\mu\nu}(x)$ и поверхность $x^0 = 0$ достаточно гладкие, что мы предполагаем. Следовательно, предложение доказано.

Вернемся к поверхности $x^0 = 0$ в некоторой системе координат. Построим в окрестности этой поверхности полугеодезическую систему координат $\tilde{x}^\mu$, в которой поверхности $\tilde{x}^0 = 0, \tilde{x}^i = x^i$ на поверхности $x^0 = 0$. Координаты $\tilde{x}^\mu$ будут определены однозначно. Построим поле нормалей к поверхностям $\tilde{x}^0 = const$ этой полугеодезической системы координат. Будем обозначать через $\tilde{n}_\mu$ компоненты этих нормалей в исходной системе координат x^μ. Если система координат x^μ меняется по закону (10)-(13), то указанные нормали не меняются как геометрические объекты. Поэтому $\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}...\nabla_{\mu_m}\tilde{n}_\lambda$ будут 4-тензорами, а величины $\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}...\nabla_{i_m}\tilde{n}_k$ устойчивыми 3-тензорами при любом m. Устойчивыми 3-тензорами будут и величины $\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}_{00}}}\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}...\nabla_{i_m}\tilde{n}^0$, а также величины типа $\frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}_{00}}} g^{0\mu}\nabla_\mu\nabla_{i_1}\nabla_{i_2}...\nabla_{i_m}\tilde{n}_k$, и т. д.

Существенная роль устойчивых 3-тензоров состоит в том, что равенство, связывающее устойчивые 3-тензоры достаточно доказать в какой-либо одной системе координат $\tilde{\tilde{x}}^\mu$, в которой интересующая нас поверхность описывается уравнением $\tilde{\tilde{x}}^0 = 0$. Если такие равенства верны в специальной системе координат, то они верны и для всех систем для которых $x^0 = 0$ есть уравнение данной поверхности. В частности, подобные равенства достаточно доказать в полугеодезической системе координат.

4 Выражение для скалярной кривизны R через трехмерные переменные

Поскольку действие S_g (см. (7)) содержит R то удобно иметь выражение для R через трехмерные величины. Это облегчает построение канонического формализма. Воспользуемся результатами пункта 3 и выведем нужное соотношение между 3-тензорами в полугеодезических координатах x^μ, рассматривая там поверхность $x^0 = 0$.

В любых координатах

$$\Gamma_{m,kl} = \overset{3}{\Gamma}_{m,kl}. \tag{58}$$

В полугеодезических координатах $g^{00} = -1$, $g^{0i} = 0$, $g_{00} = -1$, $g_{0i=0}$, и, по (37),

$$g^{ik} = \beta^{ik}, \tag{59}$$

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl} + g^{i0}\Gamma_{0,kl} = \beta^{im}\Gamma_{m,kl} = \beta^{im}\overset{3}{\Gamma}_{m,kl} = \overset{3}{\Gamma}{}^i_{kl}, \tag{60}$$

$$\Gamma^i_{kl} = \overset{3}{\Gamma}{}^i_{kl} \tag{61}$$

(в полугеодезических координатах). В любых координатах по (42), (5),

$$K_{ik} = -\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\Gamma^0_{ik}, \tag{62}$$

$$R_{ik,lm} = \frac{1}{2}(\partial_i\partial_m g_{kl} + \partial_k\partial_l g_{im}) + g_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda_{im}\Gamma^\rho_{kl} - (l \longleftrightarrow m). \tag{63}$$

В полугеодезических координатах

$$K_{ik} = -\Gamma^0_{ik}, \tag{64}$$

$$\begin{aligned} R_{ik,lm} = \frac{1}{2}(\partial_i\partial_m \beta_{kl} + \partial_k\partial_l \beta_{im}) + \beta_{nr}\overset{3}{\Gamma}{}^n_{im}\overset{3}{\Gamma}{}^r_{kl} - \Gamma^0_{im}\Gamma^0_{kl} - (l \longleftrightarrow m) = \\ = \overset{3}{R}_{ik,lm} - K_{im}K_{kl} + K_{il}K_{km}, \end{aligned} \tag{65}$$

$$R_{ik,lm} = \overset{3}{R}_{ik,lm} - K_{im}K_{kl} + K_{il}K_{km}. \tag{66}$$

Это устойчивое 3-тензорное равенство, и оно верно во всех системах координат. Соотношение (66) называется формулой Гаусса. В учебниках оно обычно записывается для случая, когда равенства $x^\mu = x^\mu(y^1, y^2, y^3)$, а не условием $x^0 = const$.

Обратимся к скалярной кривизне R. В локально геодезической системе координат

$$\begin{aligned} R = g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \beta^{il}\beta^{kl}R_{ik,lm} + 2g^{il}g^{00}R_{i0,l0} = \\ = \beta^{il}\beta^{km}R_{ik,lm} + 2g^{\mu\nu}g^{00}R_{\mu0,\nu0} = \beta^{il}\beta^{km}R_{ik,lm} + 2g^{00}g_{00}g_{00}R^{00} = \\ = \beta^{il}\beta_{km}R_{ik,lm} + 2\frac{1}{g^{00}}R^{00}, \end{aligned} \tag{67}$$

поскольку $R_{00,\mu\nu} = R_{\mu\nu,00} = 0$,

$$R = \beta^{il}\beta^{km}R_{ik,lm} + 2\frac{1}{g^{00}}R^{00}. \tag{68}$$

Это устойчивое 3-тензорное равенство, и оно верно во всех системах координат. Из (68) и (66)

$$R = \beta^{il}\beta^{kl}\overset{3}{R}_{ik,lm} - \beta^{il}\beta^{km}K_{im}K_{kl} + \beta^{il}\beta^{kl}K_{il}K_{km} + 2\frac{1}{g^{00}}R^{00} \tag{69}$$

или

$$R = \overset{3}{R} - K^i_l K^l_i + K^i_i K^l_l + 2\frac{1}{g^{00}}R^{00}. \tag{70}$$

Это также устойчивое 3-тензорное равенство. Здесь индексы у K^i_l подымаются с помощью β^{ik}. Далее, по (40),

$$2\frac{1}{g^{00}}R^{00} = -2n_0R^{00}n_0 = -2n_\mu R^{\mu\nu}n_\nu = -2n^\beta R_{\beta\delta}n^\delta = -2n^\delta R^\gamma_{\beta,\gamma\delta}n^\beta. \tag{71}$$

Для любого вектора A^μ

$$(\nabla_\gamma\nabla_\delta - \nabla_\delta\nabla_\gamma)A^\mu = R^\mu_{\alpha,\gamma\delta}A^\alpha, \tag{72}$$

поэтому

$$n^\delta(\nabla_\gamma\nabla_\delta - \nabla_\delta\nabla_\gamma)n^\gamma = n^\delta R^\gamma_{\beta,\gamma\delta}n^\beta. \tag{73}$$

Учтем, что

$$n_\mu n^\mu = -1 \Rightarrow n_\mu\nabla_\alpha n^\mu = 0 \Rightarrow n_0\nabla_\alpha n^0 = 0 \Rightarrow \nabla_\alpha n^0 = 0, \tag{74}$$

$$\nabla_\alpha n^0 = 0, \tag{75}$$

$$\nabla_\alpha n_i = \nabla_\alpha(g_{i\mu}n^\mu) = g_{i\mu}\nabla_\alpha n^\mu = g_{ik}\nabla_\alpha n^k = \beta_{ik}\nabla_\alpha n^k. \tag{76}$$

Учитывая (75), имеем

$$\nabla_\alpha n_i = \beta_{ik}\nabla_\alpha n^k, \tag{77}$$

откуда

$$\nabla_\alpha n^k = \beta^{kl}\nabla_\alpha n_l. \tag{78}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
-2n^\sigma R^\gamma_{\beta,\gamma\delta}n^\beta &= -2n^\delta(\nabla_\gamma\nabla_\delta - \nabla_\delta\nabla_\gamma)n^\gamma = \\
&= -2\nabla_\gamma(n^\delta\nabla_\delta n^\gamma) + 2(\nabla_\gamma n^\delta)(\nabla_\delta n^\gamma) + 2\nabla_\delta(n^\delta\nabla_\gamma n^\gamma) - 2(\nabla_\delta n^\delta)(\nabla_\gamma n^\gamma) = \\
&= 2(\nabla_i n^k)(\nabla_k n^i) - 2(\nabla_i n^i)(\nabla_k n^k) + 2\nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\delta n^\delta - n^\delta\nabla_\delta n^\gamma) = \\
&= 2\beta^{lk}(\nabla_i n_l)\beta^{im}(\nabla_k n_m) - 2\beta^{il}(\nabla_i n_l)\beta^{km}(\nabla_k n_m) + 2\left(\nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\delta n^\delta - n^\delta\nabla_\delta n^\gamma)\right) = \\
&= 2\beta^{lk}K_{il}\beta^{im}K_{km} - 2\beta^{il}\beta^{km}K_{il}K_{km} + 2\left(\nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\delta n^\delta - n^\delta\nabla_\delta n^\gamma)\right) = \\
&= 2K_{il}K^{il} - 2(K^i_i)^2 + 2\left(\nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\delta n^\delta - n^\delta\nabla_\delta n^\gamma)\right).
\end{aligned} \tag{79}$$

Следовательно,

$$-2n^\sigma R^\gamma_{\beta,\gamma\delta}n^\beta = 2K_{il}K^{il} - 2(K^i_i)^2 + 2\left(\nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\delta n^\delta - n^\delta\nabla_\delta n^\gamma)\right). \tag{80}$$

Вместе с (71), это дает

$$\frac{2}{g^{00}}R^{00} = 2K^i_lK^l_i - 2(K^i_i)^2 + 2\nabla_\gamma(n^\gamma\nabla_\delta n^\delta - n^\delta\nabla_\delta n^\gamma). \tag{81}$$

Отсюда из равенства (70) получим соотношение:

$$R = \overset{3}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2 + 2\nabla_\gamma(n^\gamma \nabla_\delta n^\delta - n^\delta \nabla_\delta n^\gamma). \tag{82}$$

Это соотношение оказывается полезным при построении канонического формализма в теории гравитации.

Заметим, что из равенства (82) вытекает устойчивый 3-скалярный характер величины

$$\nabla_\gamma(n^\gamma \nabla_\delta n^\delta - n^\delta \nabla_\delta n^\gamma), \tag{83}$$

что само по себе не очевидно, так как поле n^δ меняется при преобразованиях координат.

Учитывая, что для всякого вектора A^μ верно соотношение

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\, A^\mu), \tag{84}$$

можно переписать формулу (82) в виде:

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}(\overset{3}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2) + 2\partial_\gamma(\sqrt{-g}(n^\gamma \nabla_\delta n^\delta - n^\delta \nabla_\delta n^\gamma)). \tag{85}$$

5 Переменные Арновита, Дезера и Мизнера (АДМ), действие гравитационного поля в этих переменных

Переход к каноническому формализму в теории гравитации достаточно прост лишь при соответствующем выборе динамических переменных. Наиболее известны 2 способа выбрать такие переменные: способ Арновита, Дизера и Мизнера [1] и способ Фаддеева-Попова (ФП) [2, 3]. Здесь мы изложм сначала формализм АДМ, а затем покажем, что формализм ФП получается из формализма АДМ с помощью канонического преобразования. Поэтому оба формализма эквивалентны.

Введем переменные АДМ сначала формально. Затем выяснится, почему такой выбор удобен. АДМ вводят величины:

$$N = -n_0 = \frac{1}{n^0} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}, \tag{86}$$

$$N_i = g_{0i} = -\beta_{ik}\frac{n^k}{n^0} = -\beta_{ik}\frac{g^{k0}}{g^{00}}. \tag{87}$$

Здесь учтены равенства (35),(38),(40),(41). В качестве переменных, описывающих гравитационное поле АДМ выбирают

$$\beta_{ik} \equiv g_{ik}, \quad N, \quad N_i. \tag{88}$$

При этом, по (86):

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2}. \tag{89}$$

Далее, из (89) и (87):

$$g^{0k} = -\frac{N^k}{N^2}, \tag{90}$$

где $N^k = \beta^{kl} N_l$. Причем β^{kl} определены равенством

$$\beta^{kl}\beta_{li} = \delta^k_l. \tag{91}$$

Наконец, из соотношения

$$g_{0\alpha} g^{0\alpha} = 1 \tag{92}$$

находим, что

$$g_{00} g^{00} + g_{0i} g^{0i} = 1, \tag{93}$$

и по (89),(90), (87)

$$-g_{00}\frac{1}{N^2} + N_i \frac{N^i}{N^2} = 1, \tag{94}$$

откуда

$$g_{00} = -N^2 + N_i N^i \equiv -N^2 + \beta^{ik} N_i N_k. \tag{95}$$

Полагая $\beta = \det(\beta_{ik})$, $g = \det(g_{\mu\nu})$, имеем также

$$g^{00} = \frac{\det(g_{ik})}{g} = \frac{\beta}{g}, \tag{96}$$

откуда

$$g = \frac{\beta}{g^{00}} = -N^2\beta, \tag{97}$$

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\beta}. \tag{98}$$

Собирая вместе формулы (89),(87),(95),(98), имеем

$$g_{ik} = \beta_{ik}, \quad g^{ik} = \beta^{ik} - \frac{N^i N^k}{N^2}, \tag{99}$$

$$g_{0k} = N_k, \quad g^{0k} = \frac{N^k}{N^2}, \tag{100}$$

$$g_{00} = -N^2 + N_k N^k, \quad g^{00} = -\frac{1}{N}, \tag{101}$$

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\beta}, \tag{102}$$

где $N^k = \beta^{kl} N_l$, и β^{ik} определено равенством

$$\beta^{kl}\beta_{li} = \delta^k_l. \tag{103}$$

Имеем также по (86),(87),(40),(41)

$$n_\mu = -\delta^0_\mu N, \tag{104}$$

$$n^0 = \frac{1}{N}, \tag{105}$$

$$n^i = -\frac{N^i}{N}. \tag{106}$$

Выразим через переменные АДМ величину K_{ik} из (43). Имеем

$$K_{ik} = -\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\Gamma^0_{ik} = -N\Gamma^0_{ik} = -N(g^{00}\Gamma_{0,ik} + g^{0l}\Gamma_{l,ik}) = -N\left(-\frac{1}{N^2}\Gamma_{0,ik} + \frac{N^l}{N^2}\Gamma_{l,ik}\right) \tag{107}$$

или

$$K_{ik} = \frac{1}{2N}\left(\partial_i g_{0k} + \partial_k g_{0i} - \partial_0 g_{ik} - 2N^l \overset{3}{\Gamma}_{l,ik}\right) =$$
$$= \frac{1}{2N}\left(-\partial_0 \beta_{ik} + \partial_i N_k + \partial_k N_i - 2N_l \overset{3}{\Gamma}{}^l_{ik}\right) =$$
$$= \frac{1}{2N}\left(\overset{3}{\nabla}_i N_k + \overset{3}{\nabla}_k N_i - \partial_0 \beta_{ik}\right). \quad (108)$$

Таким образом,

$$K_{ik} = \frac{1}{2N}\left(\overset{3}{\nabla}_i N_k + \overset{3}{\nabla}_k N_i - \partial_0 \beta_{ik}\right). \quad (109)$$

Предполагается, что переменные АДМ введены на всех поверхностях $x^0 = const$ так, что $\partial_0\beta_{ik} \equiv \partial_0 g_{ik}$ определено. Величины N_k – неустойчивые 3-тензоры. Поэтому $\overset{3}{\nabla}_i N_k$ неустойчивый 3-тензор, $\partial_0\beta_{ik}$ – тоже неустойчивый 3-тензор. Тем не менее K_{ik} – устойчивый 3-тензор. Заметим, что N – неустойчивый 3-тензор.

Перепишем формулу (85) в терминах переменных АДМ. Имеем

$$2\partial_\gamma(\sqrt{-g}(n^\gamma \nabla_\delta n^\delta - n^\delta \nabla_\delta n^\gamma)) =$$
$$= 2\partial_0(-N\sqrt{\beta} n^0 K^i_i) + 2\partial_k(N\sqrt{\beta}(-n^k K^i_i + N g^{0\delta}(-\Gamma^0_{\delta l}) n_0 \beta^{kl})), \quad (110)$$

$$N g^{0\delta}(-\Gamma^0_{\delta l}) n_0 \beta^{kl} = N^2 g^{0\delta} g^{0\mu} \Gamma_{\mu,\delta l}\beta^{lk} =$$
$$= \frac{N^2}{2} g^{0\delta} g^{0\mu}(\partial_\delta g_{\mu l} + \partial_l g_{\mu\delta} - \partial_\mu g_{\delta l})\beta^{lk} = -\frac{N^2}{2}(\partial_l g^{00})\beta^{lk} =$$
$$= \frac{N^2}{2}\partial_l\left(\frac{1}{N^2}\right)\beta^{lk} = -\beta^{kl}\frac{\partial_l N}{N}. \quad (111)$$

Было учтено, что

$$-n^\delta \nabla_\delta n^k = -n_0 g^{0\delta}(\nabla_\delta n_l)\beta^{lk} = N g^{0\delta}(\partial_\delta n_l - \Gamma^0_{\delta l} n_0)\beta^{lk} \quad (112)$$

и $n_k = 0$ везде. Таким образом,

$$2\partial_\gamma(\sqrt{-g}(n^\gamma \nabla_\delta n^\delta - n^\delta \nabla_\delta n^\gamma)) = -2\partial_0(\sqrt{\beta} K^i_i) + 2\partial_k(\sqrt{\beta}(N^k K^i_i - \beta^{kl}\partial_l N)) \quad (113)$$

и по (85)

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}(\overset{3}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2) - 2\partial_0(\sqrt{\beta} K^i_i) + 2\partial_k(\sqrt{\beta}(N^k K^i_i - \beta^{kl}\partial_l N)). \quad (114)$$

Обратимся к действию гравитационного поля. Обычное выражение

$$\frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}\, R \quad (115)$$

содержит вторые производные от $g_{\mu\nu}$. Можно включить эти производные в член, представляющий собой полную дивергенцию. Сделаем это. Учтем, что

$$\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\rho}), \quad (116)$$

$$\Gamma^\gamma_{\rho\gamma} = \frac{\partial_\rho\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \partial_\rho \ln\sqrt{-g}\,, \quad (117)$$

$$\partial_\mu g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\gamma}(\partial_\mu g^{\gamma\lambda})g_{\lambda\beta}, \tag{118}$$

$$\partial_\mu g = g g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\rho\lambda}), \tag{119}$$

$$\frac{1}{2} g^{\rho\lambda}\partial_\mu g_{\rho\lambda} = \partial_\mu \ln\sqrt{-g} = \frac{\partial_\mu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}. \tag{120}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\partial_\gamma\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - \partial_\beta\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta}) = \\ = \partial_\gamma(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) - \partial_\beta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}) - (\partial_\gamma(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}))\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \\ +(\partial_\beta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}))\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} + \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta}).\end{aligned} \tag{121}$$

Далее,

$$\begin{aligned}g^{\alpha\beta}\Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta} = g^{\alpha\beta}g^{\rho\lambda}\frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda g_{\alpha\gamma})\Gamma^\gamma_{\rho\beta} = \\ = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g^{\rho\lambda}(\partial_\gamma g_{\lambda\alpha})\Gamma^\gamma_{\rho\beta} = -\frac{1}{2}(\partial_\gamma g^{\alpha\beta})g^{\rho\lambda}g_{\lambda\alpha}\Gamma^\gamma_{\rho\beta} = -\frac{1}{2}(\partial_\gamma g^{\rho\beta})\Gamma^\gamma_{\rho\beta}.\end{aligned} \tag{122}$$

Согласно (117),(122)

$$\begin{aligned}(\partial_\gamma(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}))\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}\frac{\partial_\gamma\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \sqrt{-g}(\partial_\gamma g^{\alpha\beta})\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \\ = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^\lambda_{\gamma\lambda} - 2\Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta}).\end{aligned} \tag{123}$$

Из (123) и (116) находим, что

$$-(\partial_\gamma(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}))\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + (\partial_\beta(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}))\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} = 2\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\Gamma^\lambda_{\gamma\lambda}). \tag{124}$$

Вместе с (121) это дает

$$\sqrt{-g}R = -\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta}) + \partial_\gamma(\sqrt{-g}(g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - g^{\gamma\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta})). \tag{125}$$

Гравитационное действие можно выбрать в виде

$$S_g = \frac{1}{2\varkappa}\int d^4x\sqrt{-g}(g^{\alpha\beta}(\Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\rho\gamma}) - 2\Lambda) \equiv \int d^4x\mathfrak{L}_g, \tag{126}$$

где

$$\mathfrak{L}_g = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}(g^{\alpha\beta}(\Gamma^\rho_{\alpha\gamma}\Gamma^\gamma_{\rho\beta} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\rho\gamma}) - 2\Lambda). \tag{127}$$

При преобразовании координат величина $d^4x\mathfrak{L}_g$ изменится на член вида $d^4x\partial_\mu(...)^\mu$. Данное S_g дает те же уравнения Эйлера, что и действие

$$\frac{1}{2\varkappa}\int d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda), \tag{128}$$

но (126) не содержит вторых производных от $g_{\mu\nu}$, что позволяет применить стандартную процедуру квантования. Поэтому мы принимаем (126) за действие гравитационного поля.

Заметим, что величина

$$\sqrt{-g}(\overset{3}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2) \tag{129}$$

из (114) тоже не содержит вторых производных по времени $\partial_0^2 g_{\mu\nu}$, но выражение (129) содержит иные вторые производные (вида $\partial_i\partial_k g_{\mu\nu}$). С другой стороны $\mathfrak{L}_g$ из (127) не содержит никаких вторых производных от $g_{\mu\nu}$. Согласно (129) величина $\mathfrak{L}_g$ инвариантна относительно линейного преобразования $x'^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta$, $a^\alpha_\beta = const$, в частности, относительно преобразований Лоренца. Это позволяет получить из нее стандартным способом с помощью теоремы Нетер момент импульса $M^{\mu\nu}$, в асимптотически плоском (в трехмерном смысле) пространстве-времени, без дополнительных усложнений. Это не такт в случае (129). Согласно (125),(127)

$$\mathfrak{L}_g = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + \frac{1}{2\varkappa}\partial_\gamma(\sqrt{-g}(g^{\gamma\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})). \tag{130}$$

Далее, по (114) и (130)

$$\mathfrak{L}_g = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}(\overset{3}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2 - 2\Lambda) + \frac{1}{2\varkappa}[\partial_\gamma(\sqrt{-g}(g^{\gamma\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta})) -$$
$$-2\partial_0(\sqrt{\beta}K^i_i) + 2\partial_k(\sqrt{\beta}(N^k K^i_i - \beta^{kl}\partial_l N))]. \tag{131}$$

Имеем

$$\partial_\gamma(\sqrt{-g}g^{\gamma\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) - 2\partial_0(\sqrt{\beta}K^i_i) + 2\partial_k(\sqrt{\beta}(N^k K^i_i - \beta^{kl}\partial_0 N)) =$$
$$= \partial_0(\sqrt{\beta}(2K^i_i - \frac{\partial_i N^i}{N}) - 2\sqrt{\beta}K^i_i) + \partial_k[-2N^k\sqrt{\beta}K^i_i + \frac{1}{N}\sqrt{\beta}N^k\partial_i N^i - \frac{1}{N}\sqrt{\beta}N^i\partial_i N^k +$$
$$+2\sqrt{\beta}\beta^{ki}\partial_i N + 2N\beta^{ki}\partial_i\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}N\partial_i\beta^{ik} + \frac{1}{N}\sqrt{\beta}\partial_0 N^k + 2\sqrt{\beta}(N^k K^i_i - \beta^{kl}\partial_l N)], \tag{132}$$

так, что

$$\partial_\gamma(\sqrt{-g}g^{\gamma\alpha}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}) - 2\partial_0(\sqrt{\beta}K^i_i) + 2\partial_k(\sqrt{\beta}(N^k K^i_i - \beta^{kl}\partial_0 N)) =$$
$$= -\partial_0(\sqrt{\beta}\frac{\partial_i N^i}{N}) +$$
$$+\partial_k[\frac{\sqrt{\beta}}{N}(N^k\partial_i N^i - N^i\partial_i N^k) + N(2\beta^{ki}\partial_i\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\partial_i\beta^{ik}) + \frac{1}{N}\sqrt{\beta}\partial_0 N^k]. \tag{133}$$

Из (131),(133) находим, что

$$\mathfrak{L}_g = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}(\overset{3}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2 - 2\Lambda) - \frac{1}{2\varkappa}\partial_0\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\partial_i N^i\right) +$$
$$+\frac{1}{2\varkappa}\partial_k[\frac{\sqrt{\beta}}{N}(N^k\partial_i N^i - N^i\partial_i N^k) + N(2\beta^{ki}\partial_i\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\partial_i\beta^{ik}) + \frac{\sqrt{\beta}}{N}\partial_0 N^k]. \tag{134}$$

Далее,

$$-\partial_0\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\partial_i N^i\right) + \partial_k\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\partial_0 N^k\right) = -\partial_0\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right)\partial_i N^i + \partial_k\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right)\partial_0 N^k =$$
$$= \partial_0\left(N^k\partial_k\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right)\right) - \partial_k\left(N^k\partial_0\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right)\right). \tag{135}$$

Поэтому (134) можно записать также в виде:

$$\mathfrak{L}_g = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}(\overset{3}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2 - 2\Lambda) + \frac{1}{2\varkappa}\partial_0\left(N^k\partial_k\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{2\varkappa}\partial_k\left[\frac{\sqrt{\beta}}{N}(N^k\partial_i N^i - N^i\partial_i N^k) + N(2\beta^{ki}\partial_i\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\partial_i\beta^{ik}) - N^k\partial_0\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right)\right]. \quad (136)$$

Эта формула лежит в основе метода АДМ. Переход от переменных $g_{\mu\nu}$ к переменных АДМ после введения канонического формализма превращается в некоторое каноническое преобразование. При каноническом преобразовании в лагранжиане, вообще говоря, отбрасывается некоторая полная производная по времени. Действительно, в случае канонического преобразования величина $p_i\dot{q}_i$ (где $\dot{q}_i = \partial_0 q_i$), содержащаяся в лагранжиане первого порядка, переходит в $p'_i\dot{q}'_i + \partial_0(f(p', q'))$, причем член $\partial_0(f(p', q'))$ отбрасывается. Поэтому в (136) можно сразу же отбросить член $\frac{1}{2\varkappa}\partial_0(N^k\partial_k(\frac{\sqrt{\beta}}{N}))$. В случае закрытой Вселенной член $\partial_k(...)^k$ не дает вклада и тоже может быть отброшен. Но в случае открытой модели поверхностные члены, отвечающие пределу $x^ix^i \longrightarrow \infty$ могут быть существенны. Поэтому нужно выяснить, какую часть члена $\frac{1}{2\varkappa}\partial_k(...)^k$ следует удержать. Для развития формализма АДМ важно отсутствие производных $\partial_0 N$ и $\partial_0 N_k$ в $\mathcal{L}_g$. Этих производных действительно нет в выражении $\frac{1}{2\varkappa}\sqrt{-g}(\overset{3}{R} + K^i_l K^l_i - (K^i_i)^2 - 2\Lambda)$т но в члене $\frac{1}{2\varkappa}\partial_k(N^k\partial_0(\frac{\sqrt{\beta}}{N}))$. такие производные есть. Поэтому важно показать, что этот член можно отбросить.

Мы рассмотрим только два случая: случай замкнутой Вселенной, когда член $\partial_k(...)^k$ полностью отбрасывается, и случай, когда пространство время становится достаточно быстро плоским на трехмерной бесконечности. В последнем случае должно быть конечно, $\Lambda = 0$, так как только при этом условии плоское пространство есть решение классических уравнений Эйнштейна. Рассмотрим данный случай. При этом массы, создающие гравитационное поле, есть только на конечных расстояниях, и можно ввести такую систему координат, в которой в классике с точностью до логарифмических по x^ix^i множителей

$$(g_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu})|_{x^0=const} \underset{x_ix_i\to\infty}{\longrightarrow} \sim \frac{1}{\sqrt{x^ix^i}}, \quad (137)$$

$$(\partial_\alpha g_{\mu\nu}(x))|_{x^0=const} \underset{x_ix_i\to\infty}{\longrightarrow} \sim \frac{1}{x^ix^i}. \quad (138)$$

При этом (см. [4]) при $x_ix_i \to \infty$

$$\begin{gathered} N \longrightarrow \infty, \qquad |N^i| \longrightarrow \sim \frac{1}{\sqrt{x^ix^i}}, \\ \beta_{ik} \longrightarrow \delta_{ik}, \qquad |\partial_0\beta_{ik}| \longrightarrow \sim \frac{1}{x^ix^i}, \\ \partial_\mu N^i \longrightarrow \sim \frac{1}{x^ix^i}, \qquad \partial_\mu\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right) \longrightarrow \sim \frac{1}{x^ix^i}. \end{gathered} \quad (139)$$

Отсюда,

$$\left|\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right)(N^k\partial_i N^i - N^i\partial_i N^k)\right| \underset{x_ix_i\to\infty}{\longrightarrow} \sim \frac{1}{(x^ix^i)^{\frac{3}{2}}}, \quad (140)$$

$$\left|-N^k\partial_0\left(\frac{\sqrt{\beta}}{N}\right)\right| \underset{x_ix_i\to\infty}{\longrightarrow} \sim \frac{1}{(x^ix^i)^{\frac{3}{2}}}, \quad (141)$$

$$|N(2\beta^{ki}\partial_i\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}\partial_i\beta^{ik})| \underset{x_ix_i\to\infty}{\longrightarrow} \sim \frac{1}{x^ix^i}. \quad (142)$$

Поскольку площадь сферы, по которой интегрируют поверхностные члены растет как $x^i x^i$, то выражениями (140), (141), можно пренебречь, а (142), нужно удержать, причем можно положить

$$\frac{1}{2\varkappa}\partial_k(N(2\beta^{ki}\partial_i\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}\partial_i\beta^{ik}))\approx\frac{1}{2\varkappa}\partial_k(2\delta^{ki}\frac{\beta}{2}\beta^{lm}\partial_i\beta_{lm}+\partial_i\beta^{ik})\approx$$
$$\approx\frac{1}{2\varkappa}\partial_k(\partial_k\beta_{ll}+\partial_i\beta^{ik})\approx\frac{1}{2\varkappa}(\partial_k\partial_k\beta_{ll}+\partial_i\partial_k\beta_{ik}),\quad(143)$$

так как $\partial_i\beta^{ik}\approx-\delta^{il}(\partial_i\beta_{lm})\delta^{mk}\approx-\partial_i\beta_{ik}$. Таким образом, учитывая, что $\sqrt{-g}=N\sqrt{\beta}$, нужно положить согласно (136) для замкнутой Вселенной

$$\mathcal{L}_g^{ADM}=\frac{1}{2\varkappa}N\sqrt{\beta}\left(\overset{3}{R}+K^{ik}K_{ik}-(K_l^l)^2-2\Lambda\right),\quad(144)$$

а для трехмерно асимптотически плоской Вселенной (при $\Lambda=0$)

$$\mathcal{L}_g^{ADM}=\frac{1}{2\varkappa}N\sqrt{\beta}\left(\overset{3}{R}+K^{ik}K_{ik}-(K_l^l)^2+\frac{1}{2\varkappa}(\partial_k\partial_k\beta_{ll}+\partial_i\partial_k\beta_{ik})\right).\quad(145)$$

Через $\mathcal{L}_g^{ADM}$ обозначается та часть $\mathcal{L}_g$, которую нужно учесть. Слова "трехмерно асимптотически плоская" означают, что все четырехмерное пространство время (а не только трехмерные сечения $x^0=const$) становится плоским на трехмерной бесконечности.

Заметим, что переход от (134) к (136) был нужен, чтобы затем отбросить все члены, содержащие $\partial_0 N$, $\partial_0 N_k$ и $\partial_0\beta_{ik}$ в выражении типа дивергенции. В (134) без такого перехода нельзя было бы отбросить член $\frac{1}{2\varkappa}\partial_k(\sqrt{\beta}\partial_0\frac{N^k}{N})$.

Соотношение (144) (следуя де Витту [5]) иногда записывается как:

$$\mathcal{L}_g^{ADM}=\frac{1}{2\varkappa}N\left(2\mathcal{J}^{ij,kl}K_{ij}K_{kl}+\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}(\overset{3}{R}-2\Lambda)\right),\quad(146)$$

где

$$\mathcal{J}^{ij,kl}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\right)(\beta^{ik}\beta^{jl}+\beta^{il}\beta^{jk}-2\beta^{ij}\beta^{kl}).\quad(147)$$

Вводится также величина

$$\mathcal{J}_{ij,kl}=\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\right)(\beta_{ik}\beta_{jl}+\beta_{il}\beta_{jk}-\beta_{ij}\beta_{kl})\quad(148)$$

причем

$$\mathcal{J}^{ij,kl}\mathcal{J}_{kl,mn}=\delta^{ij}_{mn},\quad(149)$$

где

$$\delta^{ij}_{mn}\equiv\frac{1}{2}(\delta^i_n\delta^j_m+\delta^i_m\delta^j_n).\quad(150)$$

Согласно де Витту, величина $\mathcal{J}^{ij,kl}$, $\mathcal{J}_{ij,kl}$ определяет метрику гиперпространства (у де Витта положено $2\varkappa=1$).

6 Классический канонический формализм АДМ

Построение канонического формализма для теории гравитации можно сравнить с построением такого формализма для электромагнитного поля. Там мы имеем

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = 0. \tag{151}$$

Это есть первоначальная связь, которая тривиально решается. Из соотношения

$$\dot{\pi}^0 = 0, \quad \dot{\pi}^0 \equiv \partial_0 \pi^0 \tag{152}$$

и уравнения движения получаем вторичную связь $\partial_0 E_i$ которая и оказывается единственной связью, не решаемой тривиально.

Если воспользоваться лагранжианом $\mathcal{L}_g$ из (127), принять $g_{\mu\nu}$ за исходные динамические переменные, и положить

$$P^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial(\partial_0 g_{\mu\nu})}, \tag{153}$$

то ни один из импульсов $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ не обратиться в ноль тождественно, но из (153) будут следовать четыре первичные связи:

$$\varPhi^\mu(P^{\sigma\nu}, g_{\alpha\beta}) = 0. \tag{154}$$

Из соотношений

$$\dot{\varPhi}^\mu = 0 \tag{155}$$

и уравнений движения получается еще четыре вторичные связи. Эти восемь связей в классике будут в инволюции (т. е. все они будут первого рода). При таком способе действия приходится иметь дело с восемью достаточно сложными связями. Не одна из них не решается тривиально.

Положение меняется если перейти к переменным АДМ (что после введения канонического формализма может рассматриваться как каноническое преобразование) и начать с лагранжиана $\mathcal{L}_g^{ADM}$ вида (144) (или (145)). Исходя из (144) и учитывая (109) имеем

$$\pi^N \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_g^{(ADM)}}{\partial(\partial_0 N)} = 0, \tag{156}$$

$$\pi^{N_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_g^{(ADM)}}{\partial(\partial_0 N_i)} = 0. \tag{157}$$

Эти четыре первичные связи решаются тривиально. Из соотношений

$$\dot{\pi}^N = 0, \quad \dot{\pi}^{N_i} = 0 \tag{158}$$

и уравнений движения получаем четыре вторичные связи, которые в рамках классики находятся в инволюции, т. е. являются связями первого рода. При таком подходе нужно иметь дело только с четырьмя связями, не решаемыми тривиально. Мы выбираем этот способ действия. Начав с (144) и принимая в качестве исходных переменные β_{ik}, N и N_i, получаем, прежде всего, равенства (156), (157). Учитывая далее соотношение (109) и равенство (146), находим импульсы сопряженные с β_{ik}:

$$P^{ik} = \frac{\partial \mathfrak{L}_g^{(ADM)}}{\partial(\partial_0 \beta_{ik})} = \frac{\partial \mathfrak{L}_g^{(ADM)}}{\partial K_{lm}} \frac{\partial K_{lm}}{\partial(\partial_0 \beta_{ik})} = 4N \mathcal{J}^{lm,rs} K_{rs} \left(-\frac{1}{2N} \delta_{lm}^{ik} \right) = -2\mathcal{J}^{ik,rs} K_{rs}. \quad (159)$$

откуда, согласно (149) следует что

$$K_{rs} = -\frac{1}{2} \mathcal{J}_{rs,ik} P^{ik}. \quad (160)$$

Символы $\mathcal{J}^{ik,rs}$, $\mathcal{J}_{rs,ik}$ определены равенствами (147), (148).

Учитывая (156), (157) и (146) получаем плотность обобщенного гамильтониана

$$H^{gen} = P^{rs} \partial_0 \beta_{rs} - \mathfrak{L}_g^{(ADM)} = P^{rs} \partial_0 \beta_{rs} - N \left(2\mathcal{J}^{ik,jl} K_{ij} K_{kl} + \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa} (\overset{3}{R} - 2\Lambda) \right). \quad (161)$$

Из (109) следует что

$$\partial_0 \beta_{ik} = \overset{3}{\nabla}_i N_l + \overset{3}{\nabla}_l N_k - 2N K_{il}. \quad (162)$$

С помощью (159), (160), (161) и (149) находим, что

$$\begin{aligned} H^{gen} &= P^{rs} (\overset{3}{\nabla}_r N_s + \overset{3}{\nabla}_s N_r) - 2N P^{rs} K_{rs} - N \left(2\mathcal{J}^{ik,kl} K_{ij} K_{kl} + \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa} (\overset{3}{R} - 2\Lambda) \right) = \\ &= P^{rs} (\overset{3}{\nabla}_r N_s + \overset{3}{\nabla}_s N_r) + N \mathcal{J}_{rs,ik} P^{rs} P^{ik} - N \left(\frac{1}{2} \mathcal{J}_{rs,ik} P^{rs} P^{ik} + \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa} (\overset{3}{R} - 2\Lambda) \right), \end{aligned} \quad (163)$$

или

$$H^{gen} = P^{rs} (\overset{3}{\nabla}_r N_s + \overset{3}{\nabla}_s N_r) + N \left(\frac{1}{2} \mathcal{J}^{rs,ik} P^{rs} P^{ik} - \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa} (\overset{3}{R} - 2\Lambda) \right). \quad (164)$$

Согласно (159) и (147) P_{ik} есть устойчивая 3-тензорная плотность. Поэтому $\frac{P_{ik}}{\sqrt{\beta}}$ есть устойчивый 3-тензор. Учитывая это можно написать

$$\begin{aligned} &P^{rs} (\overset{3}{\nabla}_r N_s + \overset{3}{\nabla}_s N_r) = \sqrt{\beta} \left(\frac{P^{rs}}{\sqrt{\beta}} \right) (\overset{3}{\nabla}_r N_s + \overset{3}{\nabla}_s N_r) = \\ &= 2\sqrt{\beta} \left(\overset{3}{\nabla}_r \left(\frac{P^{rs}}{\sqrt{\beta}} N_s \right) - N_r \overset{3}{\nabla}_s \left(\frac{P^{rs}}{\sqrt{\beta}} \right) \right) = N_s \left(-2\sqrt{\beta} \overset{3}{\nabla}_r \left(\frac{P^{rs}}{\sqrt{\beta}} \right) \right) + 2\overset{3}{\partial}_r (P^{rs} N_s). \end{aligned} \quad (165)$$

Во всех предыдущих формулах, а также далее индексы i, k, ... подымаются и опускаются с помощью тензоров β^{ik}, β_{ik}. При выводе (165) учтено для любого 3-вектора a^k справедливо равенство

$$\overset{3}{\nabla}_k a^k = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \partial_k (\sqrt{\beta} a^k). \quad (166)$$

Вследствие (164) и (165) имеем

$$H^{gen} = N \left(\frac{1}{2} \mathcal{J}_{rs,ik} P^{rs} P^{ik} - \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa} (\overset{3}{R} - 2\Lambda) \right) + N_s \left(-2\sqrt{\beta} \overset{3}{\nabla}_r \left(\frac{P^{rs}}{\sqrt{\beta}} \right) \right) + 2\overset{3}{\partial}_r (P^{rs} N_s). \quad (167)$$

Плотность лагранжиана первого порядка равна, после явного решения связей (156), (157))

$$\mathcal{L}_{(1)} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik} - H^{gen}, \tag{168}$$

т. е.

$$\mathcal{L}_{(1)} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik} - N\left(\frac{1}{2}\mathcal{I}_{rs,ik}P^{rs}P^{ik} - \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}(\overset{3}{R} - 2\Lambda)\right) + \\ + N_s\left(-2\sqrt{\beta}\overset{3}{\nabla}_r\left(\frac{P^{rs}}{\sqrt{\beta}}\right)\right) - 2\partial_l(P^{ls}N_s). \tag{169}$$

В случае замкнутой Вселенной, которую мы рассматриваем, член $2\partial_l\left(P^{ls}N_s\right)$ не дает вклада в (169) и мы его далее не пишем.

Из (169) видно, что для замкнутой Вселенной гамильтониан равен нулю, причем обобщенный гамильтониан есть сумма связей со своими множителями Лагранжа, каковыми является величины N и N_i. Обращение в ноль обычного гамильтониана имеет место во всякой теории, инвариантной относительно произвольной замены временной переменной $t \to t' = f(t)$. Поскольку в этом случае сдвиг во времени может быть достигнут путем такой замены, и не является физической операцией. Это обстоятельство не имеет отношение к инвариантности относительно замены других координат.

Как выяснится далее, вместо множителей Лагранжа N_k удобнее использовать $N^i = \beta^{ik}N_k$, это допустимо, при этом

$$N_s\left(-2\sqrt{\beta}\overset{3}{\nabla}_l\left(\frac{P^{ls}}{\sqrt{\beta}}\right)\right) = N^i\beta_{is}\left(-2\left(\partial_l P^{ls} + \overset{3}{\Gamma}{}^s_{kl}P^{kl}\right)\right) = \\ = N^i\left(-2\left(\beta_{is}\partial_l P^{ls} + \overset{3}{\Gamma}_{i,kl}P^{kl}\right)\right). \tag{170}$$

Здесь учтено, что для любого симметричного тензора T^{ik} можно написать

$$\overset{3}{\nabla}_i T^{ik} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\partial_i(\sqrt{\beta}T^{ik}) + \Gamma^k_{il}T^{il}. \tag{171}$$

Положим

$$\mathcal{H}_i = -2(\beta_{is}\partial_l P^{ls} + \overset{3}{\Gamma}_{i,kl}P^{kl}), \tag{172}$$

тогда будем иметь

$$-N_s\left(-2\sqrt{\beta}\overset{3}{\nabla}_l\left(\frac{P^{ls}}{\sqrt{\beta}}\right)\right) = -N^i\mathcal{H}_i. \tag{173}$$

Окончательно можно записать $\mathcal{L}_{(1)}$ из (169) для замкнутой Вселенной

$$\mathcal{L}_{(1)} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik} - N\mathcal{H}_0 - N^i\mathcal{H}_i, \tag{174}$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\mathcal{I}_{ik,lm}P^{ik}P^{lm} - \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\right)(\overset{3}{R} - 2\Lambda), \tag{175}$$

$$\mathcal{H}_i = -2(\beta_{is}\partial_l P^{ls} + \overset{3}{\Gamma}_{i,kl}P^{kl}) = -2\beta_{is}\sqrt{\beta}\overset{3}{\nabla}_l\left(\frac{P^{ls}}{\sqrt{\beta}}\right) \tag{176}$$

и

$$\mathcal{J}_{ik,lm} = \left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\right)(\beta_{il}\beta_{km} + \beta_{im}\beta_{kl} - \beta_{ik}\beta_{lm}). \tag{177}$$

Величина $\mathcal{H}_0$ является устойчивой 3-скалярная плотность, а $\mathcal{H}_i$ – устойчивой 3-векторной плотностью. Принимая во внимание (172) мы также можем записать

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i = -2(\beta_{ik}\partial_l P^{lk} + \overset{3}{\Gamma}{}^i_{kl}P^{kl}) = -2\beta_{ik}\partial_l P^{lk} - (\partial_l\beta_{im} + \partial_m\beta_{il} - \partial_i\beta_{lm})P^{lm} = \\ = -2\beta_{ik}\partial_l P^{lk} - 2(\partial_l\beta_{ik})P^{lk} + (\partial_i\beta_{lm})P^{lm},\end{aligned} \tag{178}$$

т. е.

$$\mathcal{H}_i = -2\partial_l(\beta_{ik}P^{kl}) + (\partial_i\beta_{lm})P^{lm}. \tag{179}$$

В случае открытой, 3-мерно асимтотически плоской модели, можно повторить предыдущее рассмотрение, полагая $\Lambda = 0$ и удерживая в (145) член $\frac{1}{2\varkappa}(\partial_k\partial_k\beta_{ll} - \partial_i\partial_k\beta_{ik})$. Величину $2\partial_l\left(P^{ls}N_s\right)$ можно по-прежнему построить из (169), так как при $x^ix^i \to \infty$

$$\begin{aligned}P^{ls}N_s \sim K^{ls}N_s \sim \left(\overset{3}{\nabla}_i N_k + \overset{3}{\nabla}_k N_i - \partial_0\beta_{ik}\right)N_s \sim \\ \sim \left(O\left(\frac{1}{x^ix^i}\right)\right)O\left(\frac{1}{\sqrt{x^ix^i}}\right) \sim O\left(\frac{1}{(x^ix^i)^{\frac{3}{2}}}\right),\end{aligned} \tag{180}$$

что исчезает при интегрировании по сфере S^2 радиуса $\sqrt{x^ix^i} \to \infty$. В итоге, для открытой, 3-мерно асимптотически плоской модели

$$\mathcal{L}_{(1)} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik} - N\mathcal{H}_0 - N^i\mathcal{H}_i - \frac{1}{2\varkappa}(\partial_i\partial_k\beta_{ik} - \partial_k\partial_k\beta_{ll}), \tag{181}$$

где $\mathcal{H}_0$ определено по (175) при $\Lambda = 0$ и $\mathcal{H}_i$ по (176). Теперь обычный гамильтониан не равен нулю, а дается формулой

$$H^{(conv)} = \int d^3x\left(\frac{1}{2\varkappa}(\partial_i\partial_k\beta_{ik} - \partial_k\partial_k\beta_{ll})\right), \tag{182}$$

что сводится к поверхностному интегралу. Это есть аналог электродинамической теории Гаусса, согласно которой полный электрический заряд равен интегралу от нормальной компоненты напряженности магнитного поля по бесконечно далекой сфере. Сейчас роль заряда играет энергия. Полная энергия оказывается отличной от нуля, несмотря на общековариантность теории потому, что условия, обеспечивающие асимптотически плоский характер пространства времени при $\sqrt{x^ix^i} \to \infty$ запрещают произвольные преобразования $t \to t' = t + t_0$ на трехмерной бесконечности, оставляя лишь свободу совершить сдвиги.

Возвращаемся к случаю трехмерно замкнутой Вселенной (174), (175), (176), который и рассматриваем далее, если не оговорено противоположного. Из (174) видно, что в теории имеется четыре связи (при каждом x_i):

$$\mathcal{H}_0 = 0, \tag{183}$$

$$\mathcal{H}_i = 0. \tag{184}$$

Покажем, что эти связи эквивалентны четырем из десяти уравнений Эйнштейна. Выразим компоненты тезора Эйнштейна G^{00}, G^{0i} через $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_i$:

$$R_{ik,lm} = \overset{3}{R}_{ik,lm} - K_{im}K_{kl} + K_{il}K_{km}, \quad g^{00} = -\frac{1}{N^2}, \tag{185}$$

$$R = \overset{3}{R} - K_l^i K_i^l + K_l^i K_l^l + 2\frac{1}{g^{00}} R^{00}, K^{ik} = (\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}) \left(\frac{1}{2}\beta^{ik} P_l^l - P^{ik} \right), \tag{186}$$

$$\begin{aligned} G^{00} = R^{00} - \frac{1}{2}g^{00}R = R^{00} - \frac{1}{2}g^{00}\left(\overset{3}{R} - K_l^i K_i^l + K_l^i K_i^l + 2\frac{1}{g^{00}}R^{00}\right) = \\ = \frac{1}{2}g^{00}\left(-\overset{3}{R} + K_l^i K_i^l - K_l^i K_i^l\right) = \frac{1}{2N^2}\left(\overset{3}{R} + K_i^i K_l^l - K_l^i K_i^l\right), \end{aligned} \tag{187}$$

$$\begin{aligned} & K_i^i K_l^l - K_l^i K_i^l = \\ & = \frac{(2\varkappa)^2}{\beta}\left(\left(\frac{1}{2}\delta_i^i P_m^m - P_i^i\right)\left(\frac{1}{2}\delta_l^l P_n^n - P_l^l\right) - \left(\frac{1}{2}\delta_l^i P_m^m - P_l^i\right)\left(\frac{1}{2}\delta_i^l P_n^n - P_i^l\right)\right) = \\ & = \frac{(2\varkappa)^2}{\beta}\left(\frac{1}{4}P_i^i P_l^l - \frac{3}{4}P_i^i P_l^l + \frac{1}{2}P_i^i P_l^l + \frac{1}{2}P_i^i P_l^l - P_i^l P_l^i\right) = \frac{(2\varkappa)^2}{\beta}\left(\frac{1}{2}P_i^i P_l^l - P_i^l P_l^i\right), \end{aligned} \tag{188}$$

$$G^{00} = \frac{1}{2N^2}\left(\frac{(2\varkappa)^2}{\beta}\left(\frac{1}{2}P_i^i P_l^l - P_i^l P_l^i\right) + \overset{3}{R}\right), \tag{189}$$

$$\mathcal{H}_0 = \left(\frac{(2\varkappa)^2}{\beta}\left(P_i^l P_l^i - \frac{1}{2}P_i^i P_l^l\right) - \frac{\beta}{2\varkappa}\overset{3}{R}\right), \tag{190}$$

$$G^{00} = -\frac{2\varkappa}{2N^2\sqrt{\beta}}\mathcal{H}_0. \tag{191}$$

Отметим, что из равенства $\nabla_0 G^{0k} + \nabla_i G^{ik} = 0$ следует, что G^{0k} не содержит вторых производных по x^0 от метрики, но из $\nabla_0 G^{00} + \nabla_i G^{i0} = 0$ не следует, что G^{00} не содержит первых производных по x^0 от метрики, так как $\nabla_i G^{i0} = \partial_i G^{i0} + \Gamma^i_{i\mu} G^{\mu 0} + \Gamma^0_{i\mu} G^{i\mu}$, а член $\Gamma^0_{i\mu} G^{i\mu} = \Gamma^0_{ik} G^{ik} + \Gamma^0_{i0} G^{i0}$ содержит вторые производные по x^0 через G^{ik}.

Далее,

$$G^{i0} = g^{i0} G_0^0 + g^{ik} G_k^0, \tag{192}$$

$$G^{00} = g^{00} G_0^0 + g^{0k} G_k^0, \tag{193}$$

$$G_0^0 = \frac{G^{00}}{g^{00}} - \frac{g^{0k}}{g^{00}} G_k^0, \tag{194}$$

$$G^{i0}=g^{i0}\left(\frac{G^{00}}{g^{00}}-\frac{g^{0k}}{g^{00}}G^0_k\right)+g^{ik}G^0_k, \tag{195}$$

$$G^{i0}=\frac{g^{i0}G^{00}}{g^{00}}+\left(g^{ik}-\frac{g^{0k}g^{i0}}{g^{00}}\right)G^0_k=\frac{g^{i0}G^{00}}{g^{00}}+\beta^{ik}G^0_k, \tag{196}$$

$$G^{i0}=\frac{g^{i0}G^{00}}{g^{00}}+\sqrt{-g^{00}}\beta^{ik}\frac{G^0_k}{\sqrt{-g^{00}}}. \tag{197}$$

В полугеодезических координатах

$$\begin{aligned}\frac{G^0_k}{\sqrt{-g^{00}}}&=G^0_k=R^0_k-\frac{1}{2}\delta^o_k R\ =R^0_k=R^{00}{}_{0k}+R^{i0}{}_{ik}=\\&=R^{i0}{}_{ik}=-R^i{}_{0,ik}=-\partial_i\Gamma^i_{ko}+\partial_k\Gamma^i_{i0}-\Gamma^i_{i0}\Gamma^0_{k0}-\Gamma^i_{il}\Gamma^l_{ko}+\Gamma^i_{k0}\Gamma^0_{i0}+\Gamma^i_{kl}\Gamma^l_{i0},\end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{ko}&=g^{il}\Gamma_{l,ko}=\frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{lo}+\partial_0 g_{lk}-\partial_l g_{k0})=\frac{1}{2}g^{il}\partial_0 g_{lk}=\\&=-\frac{1}{2}\beta^{il}(\partial_l g_{0k}+\partial_k g_{0l}-\partial_0 g_{lk})=\beta^{il}\Gamma_{0,lk}=\beta^{il}\Gamma^0_{lk}=-\beta^{il}K_{lk},\end{aligned} \tag{199}$$

$$\Gamma^0_{io}=-g^{00}\Gamma_{0,io}=\frac{1}{2}(\partial_i g_{0o}+\partial_0 g_{0i}-\partial_0 g_{i0}), \tag{200}$$

$$\begin{aligned}\frac{G^0_k}{\sqrt{-g^{00}}}&=\partial_i\left(\beta^{il}K_{lk}\right)-\partial_k\left(\beta^{il}K_{il}\right)+\overset{3}{\Gamma}{}^i_{im}\beta^{ml}K_{lk}-\overset{3}{\Gamma}{}^m_{ik}\beta^{il}K_{lm}=\\&=\overset{3}{\nabla}_i\left(\beta^{il}K_{lk}\right)-\partial_k\left(\beta^{il}K_{il}\right).\end{aligned} \tag{201}$$

Уравнение

$$\frac{G^0_k}{\sqrt{-g^{00}}}=\overset{3}{\nabla}_i\left(\beta^{il}K_{lk}\right)-\partial_k\left(\beta^{il}K_{il}\right) \tag{202}$$

является устойчивым 3-тензорным равенством, верным во всех системах координат.

Далее,

$$K_{ik}=\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\right)\left(\frac{1}{2}\beta_{ik}P^l_l-P_{ik}\right), \tag{203}$$

$$\beta^{ik}K_{ik}=\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\right)\frac{1}{2}P^l_l, \tag{204}$$

$$\frac{G^0_k}{\sqrt{-g^{00}}}=(2\varkappa)\left(\overset{3}{\nabla}_i\left(\left(\frac{1}{2}\delta^i_kP^l_l-\beta^{il}P_{lk}\right)\frac{1}{\beta}\right)-\frac{1}{2}\partial_k\left(\frac{1}{\beta}P^l_l\right)\right)=-(2\varkappa)\overset{3}{\nabla}_i\left(\frac{P^i_k}{\sqrt{\beta}}\right), \tag{205}$$

$$\beta^{ik}\frac{G^0_k}{\sqrt{-g^{00}}}=-(2\varkappa)\overset{3}{\nabla}_i\left(\frac{P^{ki}}{\sqrt{\beta}}\right), \tag{206}$$

$$\mathcal{H}_i = -2\beta_{is}\sqrt{\beta}\overset{3}{\nabla}_l\left(\frac{P^{ls}}{\sqrt{\beta}}\right), \tag{207}$$

$$\beta^{ik}\frac{G^0_k}{\sqrt{-g^{00}}} = \frac{2\varkappa}{2\sqrt{\beta}}\beta^{ik}\mathcal{H}_k, \tag{208}$$

$$G^{i0} = \frac{g^{i0}G^{00}}{g^{00}} + \sqrt{-g^{00}}\beta^{ik}\frac{G^0_k}{\sqrt{-g^{00}}} = -N^iG^{00} + \frac{1}{N}\beta^{ik}\frac{G^{0k}}{\sqrt{-g^{00}}} =$$
$$= \frac{N^i}{N^2}\left(\frac{2\varkappa}{2\sqrt{\beta}}\mathcal{H}_0 + \frac{1}{N}\frac{2\varkappa}{2\sqrt{\beta}}\beta^{ik}\mathcal{H}_k\right) = \frac{2\varkappa}{2N\sqrt{\beta}}\left(\beta^{ik}\mathcal{H}_k + \frac{N^i}{N}\mathcal{H}_0\right). \tag{209}$$

Таким образом

$$G^{00} = -\frac{2\varkappa}{2N^2\sqrt{\beta}}\mathcal{H}_0, \tag{210}$$

$$G^{i0} = \frac{2\varkappa}{2N\sqrt{\beta}}\left(\beta^{ik}\mathcal{H}_k + \frac{N^i}{N}\mathcal{H}_0\right). \tag{211}$$

Теперь покажем, что в классике связи (183), (184) находятся в инволюции, т. е. что все эти связи первого рода (опять таки в классике). Предварительно установим физический смысл величины $\mathcal{H}_i$. Из (174) следует что β_{ik}, P^{ik} есть пары канонически сопряженных обобщенных координат и импульсов на поверхности $x^0 = 0$. Соответственно определим скобки Пуассона двух трехмерных функционалов $F_1(\beta, P)$, $F_2(\beta, P)$ от функций β_{ik}, P^{ik}, где $x = (0, x^1, x^2, x^3)$, как

$$\{F_1, F_2\} = \int d^3x\left(\frac{\delta F_1}{\delta\beta_{ik}(x)}\frac{\delta F_2}{\delta P^{ik}(x)} - \frac{\delta F_2}{\delta\beta_{ik}(x)}\frac{\delta F_1}{\delta P^{ik}(x)}\right). \tag{212}$$

Здесь везде $x^0 = 0$, а под $\frac{\delta(\ldots)}{\delta(\ldots)}$ понимается трехмерная вариационная производная от функционалов, аргументами которых являются функции в трехмерном пространстве. В частности,

$$\left\{\beta_{ik}(x), P^{lm}(\widetilde{x})\right\} = \delta^{lm}_{ik}\delta^3(x - \widetilde{x}). \tag{213}$$

Здесь и далее, если не оговорено противоположное, $x^0 = \tilde{x}^0 = 0$, $x = (0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$, $\tilde{x} = (0,\, \tilde{x}^1,\, \tilde{x}^2,\, \tilde{x}^3)$, $\delta^3(x - \tilde{x}) = \delta(x^1 - \tilde{x}^1)\delta(x^2 - \tilde{x}^2)\delta(x^3 - \tilde{x}^3)$. Будем также писать $\beta_{ik}(x) \equiv \beta_{ik}$, $\beta_{ik}(\tilde{x}) \equiv \underset{\sim}{\beta_{ik}}$ и аналогично для других функций, например (213) записывается в виде

$$\left\{\beta_{ik}, \underset{\sim}{P^{lm}}\right\} = \delta^{lm}_{ik}\delta^3(x - \widetilde{x}). \tag{214}$$

Очевидно, что

$$\left\{\beta_{ik}, \underset{\sim}{\beta_{lm}}\right\} = 0, \quad \left\{P^{ik}, \underset{\sim}{P^{lm}}\right\} = 0. \tag{215}$$

Скобки Пуассона удовлетворяют обычным уравнениям:

$$\{F_1, F_2\} = -\{F_2, F_1\}, \tag{216}$$

$$\{F_1, F_2F_3\} = \{F_1, F_2\}\, F_3 + F_2\, \{F_1, F_3\}\,, \tag{217}$$

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0. \tag{218}$$

Покажем, что величины $\mathcal{H}_i(x)$ являются генераторами трехмерных преобразований координат (в смысле составления скобок Пуассона). Пусть $\xi^i(x) \equiv \xi^i(x^1,\, x^2,\, x^3)$ – бесконечно малые функции. При преобразовании $x^i \to x^{'i} = x^i + \xi^i(x)$, $x^0 \to x^{'0} = x^0$ имеем с нужной точностью по обычному 3-тензорному закону

$$\begin{aligned}\beta^{'}_{ik}(x^{'}) = \frac{\partial x^l}{\partial x^{'i}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{'k}}\beta_{lm}(x) = \frac{\partial (x^{'l}-\xi^l)}{\partial x^{'i}}\frac{\partial (x^{'m}-\xi^m)}{\partial x^{'k}}\beta_{lm}(x) = \\ = \beta_{ik}(x) - (\partial_i\xi^l)\beta_{lk} - \beta_{im}\partial_k\xi^m,\end{aligned} \tag{219}$$

$$\beta^{'}_{ik}(x) = \beta^{'}_{ik}(x^{'}-\xi) = \beta^{'}_{ik}(x^{'}) - (\partial_l\beta_{ik})\xi^l, \tag{220}$$

$$\delta\beta_{ik} = \beta^{'}_{ik}(x) - \beta_{ik}(x) = -(\partial_l\beta_{ik})\xi^l - (\partial_i\xi^k)\beta_{lk} - \beta_{il}\partial_k\xi^l, \tag{221}$$

$$\begin{aligned}\delta\beta_{ik} = -\Gamma_{i,lk}\xi^k - \Gamma_{k,li}\xi^l - (\partial_i\xi^l)\beta_{lk} - \beta_{il}\partial_k\xi^l = \\ = -\left(\partial_i\xi^m + \overset{3}{\Gamma}{}^m_{il}\xi^l\right)\beta_{mk} - \beta_{im}\left(\partial_k\xi^m + \overset{3}{\Gamma}{}^m_{kl}\xi^l\right) = \\ = -(\overset{3}{\nabla}_i\xi^m)\beta_{mk} - \beta_{im}(\overset{3}{\nabla}_k\xi^m) = -\overset{3}{\nabla}_i\xi_k - \overset{3}{\nabla}_k\xi_i.\end{aligned} \tag{222}$$

Итак

$$\begin{aligned}\delta\beta_{ik} = \beta^{'}_{ik}(x) - \beta_{ik}(x) = \\ = -\overset{3}{\nabla}_i\xi_k - \overset{3}{\nabla}_k\xi_i = -\left(\partial_i\xi_k - \Gamma^l_{ik}\xi_l\right) - \left(\partial_k\xi_i + \Gamma^l_{ki}\xi_l\right) = -\partial_i\xi_k - \partial_k\xi_i + 2\Gamma_{l,ik}\xi^k = \\ = -\beta_{il}\partial_k\xi^l - \beta_{kl}\partial_i\xi^l - \Gamma_{k,li}\xi^l - \Gamma_{i,lk}\xi^l.\end{aligned} \tag{223}$$

Учитывая далее, что $\frac{P^{ik}}{\sqrt{\beta}}$ есть 3-тензор, имеем

$$\frac{P'^{ik}(x')}{\sqrt{\beta'(x')}} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\frac{P^{lm}(x)}{\sqrt{\beta(x)}} = \frac{\partial (x^i+\xi^i)}{\partial x^l}\frac{\partial (x^k+\xi^k)}{\partial x^m}\frac{P^{lm}(x)}{\sqrt{\beta(x)}}, \tag{224}$$

$$\frac{P'^{ik}(x')}{\sqrt{\beta'(x')}} = \frac{P^{ik}(x)}{\sqrt{\beta(x)}} + (\partial_l\xi^i)\frac{P^{lk}(x)}{\sqrt{\beta(x)}} + \frac{P^{il}(x)}{\sqrt{\beta(x)}}\partial_l\xi^k, \tag{225}$$

$$P'^{ik}(x') = \frac{\sqrt{\beta'(x')}}{\sqrt{\beta(x)}}\left(P^{ik}(x) + (\partial_l\xi^i)P^{lk}(x) + P^{il}(x)\partial_l\xi^k\right), \tag{226}$$

$$\begin{aligned}\beta^{'}(x^{'}) = \det\left(\beta^{'}_{ik}(x^{'})\right) = \det\left(\frac{\partial x^l}{\partial x^{'i}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{'k}}\beta_{lm}(x)\right) = \left(\det\left(\frac{\partial x^l}{\partial x^{'i}}\right)\right)^2\beta(x) = \\ = \left(\det\left(\frac{\partial (x^{'l}-\xi^l)}{\partial x^{'i}}\right)\right)^2\beta(x) =\end{aligned}$$

$$= \left(\det\left(\delta_i^l - \partial_i \xi^l\right)\right)^2 \beta(x) = (1 - \partial_l \xi^l)^2 \beta(x) = (1 - 2\partial_l \xi^l)\beta(x), \quad (227)$$

$$\sqrt{\beta'(x')} = (1 - \partial_l \xi^l)\sqrt{\beta(x)}, \quad (228)$$

$$P'^{ik}(x') = (1 - \partial_l \xi^l)\left(P^{ik}(x) + (\partial_l \xi^i)P^{lk}(x) + P^{il}(x)\partial_l \xi^k\right), \quad (229)$$

$$P'^{ik}(x') = P^{ik}(x) + (\partial_l \xi^i)P^{lk}(x) + P^{il}(x)\partial_l \xi^k - (\partial_l \xi^l)P^{ik}, \quad (230)$$

$$P'^{ik}(x) = P'^{ik}(x') - (\partial_l P^{ik})\xi^l, \quad (231)$$

$$\delta P^{ik}(x) \equiv P'^{ik}(x) - P^{ik}(x) = (\partial_l \xi^i)P^{lk}(x) + P^{il}(x)\partial_l \xi^k - (\partial_l P^{ik})\xi^l - (\partial_l \xi^l)P^{ik}(x), \quad (232)$$

т. е.

$$\delta P^{ik}(x) \equiv P'^{ik}(x) - P^{ik}(x) = (\partial_l \xi^i)P^{lk}(x) + P^{il}(x)\partial_l \xi^k - \partial_l(P^{ik}\xi^l). \quad (233)$$

Найдем теперь скобку Пуассона (176):

$$\left\{\int d^3x \mathcal{H}_i \xi^i, \underset{\sim}{\beta}_{kl}\right\} = \int d^3x \left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\beta}_{kl}\right\}\xi^i =$$
$$= \int d^3x \xi^i \left\{-2(\beta_{is}\partial_m P^{ms} + \overset{3}{\Gamma}{}^i_{ms}P^{ms}), \underset{\sim}{\beta}_{kl}\right\} =$$
$$= \int d^3x\, \xi^i \left(-2\left(\beta_{il}\partial_m \left\{P^{ms}, \underset{\sim}{\beta}_{kl}\right\} + \overset{3}{\Gamma}_{i,ms}\left\{P^{ms}, \underset{\sim}{\beta}_{kl}\right\}\right)\right) =$$
$$= 2\int d^3x \xi^i \left(\beta_{is}\partial_m \left(\delta^{ms}_{kl}\delta^3(x - \widetilde{x}) + \overset{3}{\Gamma}_{i,ms}\delta^{ms}_{kl}\delta^3(x - \widetilde{x})\right)\right) =$$
$$= 2\int d^3x\, \xi^i \left(\frac{1}{2}\beta_{ik}\partial_l \delta^3(x - \tilde{x}) + \frac{1}{2}\beta_{il}\partial_k \delta^3(x - \tilde{x}) + \overset{3}{\Gamma}_{i,ms}\delta^3(x - \tilde{x})\right) =$$
$$= \int d^3x \left(-\partial_l \xi^k - \partial_k \xi^l + 2\xi_i \overset{3}{\Gamma}_{i,kl}\right)\delta^3(x - \tilde{x}) = -\left(\underset{\sim}{\overset{3}{\nabla}}_l \underset{\sim}{\xi}_k + \underset{\sim}{\overset{3}{\nabla}}_k \underset{\sim}{\xi}_l\right). \quad (234)$$

Сравнивая (234) с (223), имеем

$$\delta\underset{\sim}{\beta}_{kl} = \left\{\int d^3x \mathcal{H}_i \xi^i, \underset{\sim}{\beta}_{kl}\right\}. \quad (235)$$

Далее, по (176) имеем

$$\left\{\int d^3x \mathcal{H}_i \xi^i, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\} = \int d^3x \xi^i \left\{-2(\beta_{is}\partial_m P^{ms} + \overset{3}{\Gamma}{}^i_{ms}P^{ms}), \underset{\sim}{P}^{kl}\right\} =$$
$$= -2\int d^3x\, \xi^i \Big(\left\{\beta_{is}, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\}\partial_m P^{ms} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\partial_m \left\{\beta_{is}, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\} + \partial_s \left\{\beta_{im}, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\} - \partial_i \left\{\beta_{ms}, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\}\right)P^{ms}\Big) =$$
$$= -\int d^3x\, \xi^i \left(2\delta^{kl}_{is}\delta^3(x - \tilde{x})\partial_m P^{ms} + \left(\left(\delta^{kl}_{is}\partial_m + \delta^{kl}_{im}\partial_s - \delta^{kl}_{ms}\partial_i\right)\delta^3(x - \tilde{x})\right)P^{ms}\right) =$$

$$= -\int d^3x\Big(\big(\xi^k\partial_m P^{ml} + \xi^l\partial_m P^{mk}\big)\,\delta^3(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2}\xi^k P^{ml}\partial_m\delta^3(x-\tilde{x}) +$$

$$+\frac{1}{2}\xi^l P^{mk}\partial_m\delta^3(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2}\xi^k P^{ls}\partial_s\delta^3(x-\tilde{x}) + \frac{1}{2}\xi^l P^{ks}\partial_s\delta^3(x-\tilde{x}) - \xi^i P^{kl}\partial_i\delta^3(x-\tilde{x})\Big), \quad (236)$$

$$\left\{\int d^3x\mathcal{H}_i\xi^i, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\} =$$

$$= \int d^3x\,\big(-\xi^k\partial_m P^{ml} - \xi^l\partial_m P^{mi} + \partial_m(\xi^k P^{ml}) + \partial_m(\xi^l P^{mk}) - \partial_i(\xi^i P^{kl})\big)\,\delta^3(x-\tilde{x}) =$$

$$= \int d^3x\,\big((\partial_m\xi^k)P^{ml} + (\partial_m\xi^l)P^{mk} - \partial_i(\xi^i P^{kl})\big)\,\delta^3(x-\tilde{x}), \quad (237)$$

т. е.

$$\left\{\int d^3x\mathcal{H}_i\xi^i, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\} = (\underset{\sim}{\partial_m}\underset{\sim}{\xi^k})\underset{\sim}{P}^{ml} + (\underset{\sim}{\partial_m}\underset{\sim}{\xi^l})\underset{\sim}{P}^{mk} - \underset{\sim}{\partial_i}(\underset{\sim}{\xi^i}\underset{\sim}{P}^{kl}). \quad (238)$$

Сравнивая (238) с (233) видим, что

$$\delta\underset{\sim}{P}^{kl} = \left\{\int d^3x\,\mathcal{H}_i\xi^i, \underset{\sim}{P}^{kl}\right\}. \quad (239)$$

Таким образом при преобразовании $x^i \to x^{'i} = x^i + \xi^i(x)$, $x^0 = x^{'0}$ где $\xi^i(x) \equiv \xi^i(x^1, x^2, x^3)$ бесконечно малы, величины

$$\delta\beta_{ik} = \beta^{'}_{ik}(x) - \beta_{ik}(x), \quad (240)$$

$$\delta P^{ik} = P'^{ik}(x) - P^{ik}(x), \quad (241)$$

даются равенством (согласно (235) и (239))

$$\delta\underset{\sim}{\beta}_{ik} = \left\{\int d^3x\xi^l\mathcal{H}_l, \underset{\sim}{\beta}_{ik}\right\}, \quad (242)$$

$$\delta\underset{\sim}{P}^{ik} = \left\{\int d^3x\xi^l\mathcal{H}_l, \underset{\sim}{P}^{ik}\right\}. \quad (243)$$

Значит, величины $\mathcal{H}_i$ действительно есть генераторы трехмерного преобразования координат на поверхности $x^0 = 0$. Именно поэтому было удобно выбрать в (174) в качестве связи величины $\mathcal{H}_i$, а не $\mathcal{H}^i$.

Используем свойство величины $\mathcal{H}_i$, чтобы найти скобки Пуассона $\left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\}$ и $\left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_k}\right\}$. Из сказанного следует, что скобка Пуассона $\int d^3x\xi^i\mathcal{H}_i$ с 3-тензорами или 3-тензорной плотностью равна изменению этого тензора или этой тензорной плотности при бесконечно малом преобразовании $x^i \to x^{'i} = x^i + \xi^i(x)$ по обычному тензорному закону (по обычному закону преобразования тензорной плотности). Это верно, конечно, только для тензоров и тензорных плотностей, построенных лишь из величин β_{ik}, $\mathcal{P}^{ik}$. В частности, $\mathcal{H}_0$ есть 3-скалярная плотность и $\mathcal{H}_i$ есть 3-векторная плотность. Поэтому

$$\delta\underset{\sim}{\mathcal{H}_0} = \left\{\int d^3x\xi^l\mathcal{H}_l, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\}, \quad (244)$$

$$\delta \underset{\sim}{\mathcal{H}_i} = \left\{ \int d^3x \xi^l \mathcal{H}_l, \underset{\sim}{\mathcal{H}_i} \right\}, \tag{245}$$

где изменения

$$\delta \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^{'}(x) - \mathcal{H}_0(x), \tag{246}$$

$$\delta \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i^{'}(x) - \mathcal{H}_i(x), \tag{247}$$

произведены преобразованием $x^i \longrightarrow x'^i = x^i + \xi^i(x)$. Учитывая, что $\frac{\mathcal{H}_0}{\sqrt{\beta}}$ есть 3-скаляр, а $\frac{\mathcal{H}_i}{\sqrt{\beta}}$ – 3-вектор, имеем, используя (228),

$$\mathcal{H}_0'(x') = \sqrt{\beta'(x')}\frac{\mathcal{H}_0'(x')}{\sqrt{\beta'(x')}} = \sqrt{\beta'(x')}\frac{\mathcal{H}_0(x)}{\sqrt{\beta(x)}} = (1 - \partial_l \xi^l)\mathcal{H}_0(x), \tag{248}$$

$$\mathcal{H}_0'(x) = \mathcal{H}_0'(x') - \xi^i \partial_i \mathcal{H}_0, \tag{249}$$

$$\delta \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0'(x) - \mathcal{H}_0(x) = -\partial_i(\xi^i \mathcal{H}_0), \tag{250}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i^{'}(x^{'}) = \sqrt{\beta^{'}(x^{'})}\frac{\mathcal{H}_i^{'}(x^{'})}{\sqrt{\beta^{'}(x^{'})}} = \sqrt{\beta^{'}(x^{'})}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\mathcal{H}_k(x)}{\sqrt{\beta(x)}} = \\ = (1 - \partial_l \xi^l)(\delta_i^k - \partial_i \xi^k)\mathcal{H}_k(x) = \mathcal{H}_i(x) - (\partial_l \xi^l)\mathcal{H}_i - (\partial_i \xi^l)\mathcal{H}_l,\end{aligned} \tag{251}$$

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{H}_i = \mathcal{H}_i'(x) - \mathcal{H}_i(x) = \mathcal{H}_i'(x') - \mathcal{H}_i(x) - \xi^l \partial_l \mathcal{H}_i = \\ = (\partial_l \xi^l)\mathcal{H}_i - \xi^l \partial_l \mathcal{H}_i - (\partial_i \xi^l)\mathcal{H}_l,\end{aligned} \tag{252}$$

$$\delta \mathcal{H}_i = -\partial_k(\xi^k \mathcal{H}_i) - \mathcal{H}_k \partial_i \xi^k. \tag{253}$$

Сравнивая (244) с (250), имеем

$$\left\{ \int d^3x \xi^l \mathcal{H}_l, \mathcal{H}_0 \right\} = -\underset{\sim}{\partial_i}(\underset{\sim}{\xi^i}\underset{\sim}{\mathcal{H}^0}), \tag{254}$$

а сравнивая (245) с (253), получаем

$$\left\{ \int d^3x \xi^l \mathcal{H}_l, \underset{\sim}{\mathcal{H}_i} \right\} = -\underset{\sim}{\partial_k}(\underset{\sim}{\xi^k}\underset{\sim}{\mathcal{H}_i}) - \underset{\sim}{\mathcal{H}_k}\underset{\sim}{\partial_i}\underset{\sim}{\xi^k}. \tag{255}$$

В силу (254)

$$\int d^3x \left(\xi^l \left\{ \mathcal{H}_l, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0} \right\} + \delta^3(x - \tilde{x})\partial_i(\xi^i \mathcal{H}_0) \right) = 0, \tag{256}$$

т. е.

$$\int d^3x \xi^i \left(\left\{ \mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0} \right\} - \mathcal{H}_0 \partial_i \delta^3(x - \tilde{x}) \right) = 0. \tag{257}$$

Так как $\xi^i(x)$ произвольны, то

$$\left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = \mathcal{H}_0 \partial_i \delta^3(x-\tilde{x}). \tag{258}$$

В соответствии с (255)

$$\int d^3x \left(\xi^l \left\{\mathcal{H}_l, \underset{\sim}{\mathcal{H}_i}\right\} + \delta^3(x-\tilde{x})\partial_l(\xi^l \mathcal{H}_i) + \delta^3(x-\tilde{x})\mathcal{H}_l \partial_i \xi^l\right) = 0, \tag{259}$$

т. е.

$$\int d^3x \left(\xi^k \left(\left\{\mathcal{H}_k, \underset{\sim}{\mathcal{H}_i}\right\} - \mathcal{H}_i \partial_k \delta^3(x-\tilde{x})\right) + \delta^3(x-\tilde{x})\mathcal{H}_k \partial_i \xi^k\right) = 0, \tag{260}$$

$$\int d^3x \xi^k \left(\left\{\mathcal{H}_k, \underset{\sim}{\mathcal{H}_i}\right\} - \mathcal{H}_i \partial_k \delta^3(x-\tilde{x}) - \underset{\sim}{\mathcal{H}_k} \partial_i \delta^3(x-\tilde{x})\right) = 0, \tag{261}$$

откуда

$$\left\{\mathcal{H}_k, \underset{\sim}{\mathcal{H}_i}\right\} = \mathcal{H}_i \partial_k \delta^3(x-\tilde{x}) + \underset{\sim}{\mathcal{H}_k} \partial_i \delta^3(x-\tilde{x}), \tag{262}$$

т. е.

$$\left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_k}\right\} = -\underset{\sim}{\mathcal{H}_i}\underset{\sim}{\partial_k} \delta^3(x-\tilde{x}) + \mathcal{H}_k \partial_i \delta^3(x-\tilde{x}). \tag{263}$$

Таким образом по (258) и (263)

$$\left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_k}\right\} = -\underset{\sim}{\mathcal{H}_i}\underset{\sim}{\partial_k} \delta^3(x-\tilde{x}) + \mathcal{H}_k \partial_i \delta^3(x-\tilde{x}), \tag{264}$$

$$\left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = \mathcal{H}_0 \partial_i \delta^3(x-\tilde{x}). \tag{265}$$

Чтобы показать, что все связи являются связями первого рода, нужно найти еще скобку $\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\}$. Вычислим эту скобку Пуассона. По (175)

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} P^{lm} + \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\left(-\overset{3}{R} + 2\Lambda\right). \tag{266}$$

Выражение $\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\}$ антисимметрично относительно $(x \leftrightarrow \tilde{x})$, поэтому все члены с $\delta^3(x-\tilde{x})$ сокращаются. Остаются лишь члены с производными от $\delta^3(x-\tilde{x})$. Значит,

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} P^{lm}, \underset{\sim}{\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}}(-\underset{\sim}{\overset{3}{R}})\right\} + \left\{\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\right)(-\overset{3}{R}), \frac{1}{2}\underset{\sim}{\mathcal{J}_{ik,lm}} \underset{\sim}{P^{ik}} \underset{\sim}{P^{lm}}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} P^{lm}, \underset{\sim}{\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}}(-\underset{\sim}{\overset{3}{R}})\right\} - \left\{\frac{1}{2}\underset{\sim}{\mathcal{J}_{ik,lm}} \underset{\sim}{P^{ik}} \underset{\sim}{P^{lm}}, \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}(-\overset{3}{R})\right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} P^{lm}, \frac{\sqrt{\beta}}{2\underset{\sim}{\varkappa}} (-\underset{\sim}{\overset{3}{R}}) \right\} - (x \longleftrightarrow \widetilde{x}). \quad (267)$$

,

$$\left\{ \mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0} \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} P^{lm}, \frac{\sqrt{\beta}}{2\underset{\sim}{\varkappa}} (-\underset{\sim}{\overset{3}{R}}) \right\} - (x \longleftrightarrow \widetilde{x}). \quad (268)$$

Далее

$$\left\{ \mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0} \right\} = \frac{1}{2} \Big(\mathcal{J}_{ik,lm} \left\{ P^{ik}, \frac{\sqrt{\beta}}{2\underset{\sim}{\varkappa}} (-\underset{\sim}{\overset{3}{R}}) \right\} P^{lm} + \mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} \left\{ P^{lm}, \frac{\sqrt{\beta}}{2\underset{\sim}{\varkappa}} (-\underset{\sim}{\overset{3}{R}}) \right\} \Big) - \\ -(x \longleftrightarrow \widetilde{x}). \quad (269)$$

В классике, после вычисления скобок Пуассона, все множители перестановочны. Поэтому в классике два члена в скобках в (269) справа равны между собой, так что

$$\left\{ \mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0} \right\} = \mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} \left\{ P^{lm}, \frac{\sqrt{\beta}}{2\underset{\sim}{\varkappa}} (-\underset{\sim}{\overset{3}{R}}) \right\} - (x \longleftrightarrow \widetilde{x}) = \\ = \frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa} \mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} \left\{ P^{lm}, (-\underset{\sim}{\overset{3}{R}}) \right\} - (x \longleftrightarrow \widetilde{x}), \quad (270)$$

где мы снова учли, что все члены пропорциональные $\delta^3(x-\tilde{x})$ сокращаются с $(x \leftrightarrow \tilde{x})$. Имеем

$$\overset{3}{R} = \beta^{il}\beta^{km}\overset{3}{R}_{ik,lm} = \beta^{il}\beta^{km} \left(\frac{1}{2} (\partial_i \partial_m \beta_{kl} + \partial_k \partial_l \beta_{im} - \partial_i \partial_l \beta_{km} - \partial_k \partial_m \beta_{il}) + \right. \\ \left. + \beta_{np} \left(\overset{3}{\Gamma}{}^n_{im} \overset{3}{\Gamma}{}^p_{kl} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{il} \overset{3}{\Gamma}{}^p_{km} \right) \right) = \\ = \frac{1}{2} (\beta^{il}\beta^{km} + \beta^{km}\beta^{il} - \beta^{im}\beta^{kl} - \beta^{kl}\beta^{im}) \partial_i \partial_m \beta_{kl} + \frac{1}{2} (\beta^{il}\beta^{mk} + \beta^{ik}\beta^{ml} - 2\beta^{im}\beta^{kl}) \beta_{np} \overset{3}{\Gamma}{}^n_{im} \overset{3}{\Gamma}{}^p_{kl} = \\ = \frac{1}{2} (\beta^{il}\beta^{mk} + \beta^{ik}\beta^{ml} - 2\beta^{im}\beta^{kl}) \left(\partial_i \partial_m \beta_{kl} + \beta_{np} \overset{3}{\Gamma}{}^n_{im} \overset{3}{\Gamma}{}^p_{kl} \right). \quad (271)$$

Символы

$$\mathcal{J}^{ij,kl} = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa} \right) (\beta^{ik}\beta^{jl} + \beta^{il}\beta^{jk} - 2\beta^{ij}\beta^{kl}) \quad (272)$$

$$\mathcal{J}_{ij,kl} = \left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}} \right) (\beta_{ik}\beta_{jl} + \beta_{il}\beta_{jk} - \beta_{ij}\beta_{kl}), \quad (273)$$

были введены ранее, причем

$$\mathcal{J}^{ij,kl}\mathcal{J}_{ij,kl} = \delta^{ij}_{mn} \equiv \frac{1}{2} (\delta^i_m \delta^j_n + \delta^i_n \delta^j_m). \quad (274)$$

В этих терминах

$$\overset{3}{R} = 2 \left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}} \right) \mathcal{J}^{im,kl} \left(\partial_i \partial_m \beta_{kl} + \beta_{np} \overset{3}{\Gamma}{}^n_{im} \overset{3}{\Gamma}{}^p_{kl} \right). \quad (275)$$

Согласно (270) и (275)

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\right\} = -\left(\frac{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}}{2\varkappa}\right)\underset{\sim}{\mathcal{J}}_{ik,lm}P^{ik}\left\{P^{lm}, 2\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}}\right)\mathcal{J}^{np,rs}\left(\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\underset{\sim}{\beta}_{rs} + \underset{\sim}{\beta}_{tu}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^t_{np}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^u_{rs}\right)\right\} - \\ -(x \longleftrightarrow \widetilde{x}), \quad (276)$$

где $\underset{\sim}{\partial}_i \equiv \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}$. Учитывая опять, что члены, пропорциональные $\delta^3(x-\tilde{x})$ сокращаются с $(x \leftrightarrow \tilde{x})$, можем записать

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\right\} = -2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,rs}\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\underset{\sim}{\beta}_{rs} + \underset{\sim}{\beta}_{tu}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^t_{np}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^u_{rs}\right\} - (x \longleftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,rs}\left(\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\beta}_{rs}\right\} + \underset{\sim}{\beta}_{tu}\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^t_{np}\right\}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^u_{rs} + \underset{\sim}{\beta}_{tu}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^t_{np}\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^u_{rs}\right\}\right) - \\ -(x \longleftrightarrow \widetilde{x}), \quad (277)$$

где мы приняли во внимание, что $\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,rs} = \underset{\sim}{\mathcal{J}}^{rs,np}$. Далее,

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\right\} = -2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,rs}\left(\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\beta}_{rs}\right\} + 2\underset{\sim}{\beta}^{tu}\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}_{t,np}\right\}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}_{u,rs}\right) =$$

$$= -2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,rs}\left(\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\beta}_{rs}\right\} + \left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\beta}_{tp} + \underset{\sim}{\partial}_p\underset{\sim}{\beta}_{tn} - \underset{\sim}{\partial}_t\underset{\sim}{\beta}_{np}\right\}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^t_{rs}\right) - \\ -(x \longleftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,rs}\left(\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\beta}_{rs}\right\} + \left\{P^{lm}, 2\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\beta}_{tp} - \underset{\sim}{\partial}_t\underset{\sim}{\beta}_{np}\right\}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^t_{rs}\right) - (x \longleftrightarrow \widetilde{x}), \quad (278)$$

так как $\mathcal{J}^{np,rs} = \mathcal{J}^{rs,np}$. Поскольку

$$\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\beta}_{rs}\right\} = -\delta^{lm}_{rs}\delta^3(x-\tilde{x}), \quad (279)$$

то

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\right\} = -2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,rs}\Bigg(\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\beta}_{rs}\right\} + \\ + \left(2\underset{\sim}{\partial}_n\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\beta}_{tp}\right\} - \underset{\sim}{\partial}_t\left\{P^{lm}, \underset{\sim}{\beta}_{np}\right\}\right)\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^t_{rs}\Bigg) - (x \longleftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= 2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,rs}\left(\delta^{lm}_{rs}\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\delta^3(x-\tilde{x}) + \left(2\delta^{lm}_{tp}\underset{\sim}{\partial}_n\delta^3(x-\tilde{x}) - \delta^{lm}_{np}\underset{\sim}{\partial}_t\delta^3(x-\tilde{x})\right)\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^t_{rs}\right) - \\ -(x \longleftrightarrow \widetilde{x}), \quad (280)$$

так, что

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\right\} = 2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\Bigg(\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,lm}\underset{\sim}{\partial}_n\underset{\sim}{\partial}_p\delta^3(x-\tilde{x}) + \\ + 2\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{nm,rs}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^l_{rs}\underset{\sim}{\partial}_n\delta^3(x-\tilde{x}) - \underset{\sim}{\mathcal{J}}^{lm,rs}\underset{\sim}{\overset{3}{\Gamma}}{}^n_{rs}\underset{\sim}{\partial}_n\delta^3(x-\tilde{x})\Bigg) - (x \longleftrightarrow \widetilde{x}). \quad (281)$$

Приведем некоторые формулы, содержащие δ-функции. Далее, f, F, φ и $\utilde{f}$, $\utilde{F}$, $\utilde{\varphi}$ произвольные функции от x^μ и $\tilde{x}^\mu$ соответственно. Как уже отмечалось

$$F\utilde{f}\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = 0. \tag{282}$$

Далее,

$$\begin{aligned} F\utilde{f}\varphi\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) &= -F\utilde{f}\varphi\utilde{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x}) = -F\utilde{f}\utilde{\partial}_k(\varphi\delta^3(x-\tilde{x})) = \\ &= -F\utilde{f}\utilde{\partial}_k(\utilde{\varphi}\delta^3(x-\tilde{x})) = -F\utilde{f}\utilde{\varphi}\utilde{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x})) - F\utilde{f}(\utilde{\partial}_k\utilde{\varphi})\delta^3(x-\tilde{x}) = \\ &= F\utilde{f}\utilde{\varphi}\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) - F\utilde{f}(\utilde{\partial}_k\utilde{\varphi})\delta^3(x-\tilde{x}). \end{aligned} \tag{283}$$

Поэтому в силу (282)

$$F\utilde{f}\varphi\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = F\utilde{f}\utilde{\varphi}\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}). \tag{284}$$

Мы учли, что

$$\delta^3(x-\widetilde{x}) = \delta^3(\widetilde{x}-x), \tag{285}$$

$$\partial_k\delta^3(x-\widetilde{x}) = -\utilde{\partial}_k\delta^3(\widetilde{x}-x). \tag{286}$$

Верна также формула,

$$\partial_i\partial_k\delta^3(x-\widetilde{x}) = \utilde{\partial}_i\utilde{\partial}_k\delta^3(\widetilde{x}-x). \tag{287}$$

Равенство (284) означает, что работая с выражениями, содержащими член $-(x \leftrightarrow \tilde{x})$, можно заменять в членах, пропорциональных $\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})$ любую функцию φ на $\utilde{\varphi}$ и наоборот.

Наконец,

$$\begin{aligned} &f\utilde{F}\partial_i\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = f\partial_i\partial_k(\utilde{F}\delta^3(x-\tilde{x})) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = \\ &= f\partial_i\partial_k(F\delta^3(x-\tilde{x})) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = f\partial_i\left((\partial_k F)\delta^3(x-\tilde{x}) + F\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})\right) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = \\ &= f(\partial_i\partial_k F)\delta^3(x-\tilde{x}) + f(\partial_k F)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) + f(\partial_i F)\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) + fF\partial_i\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = \\ &= fF\partial_i\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) + f(\partial_i F)\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) + f(\partial_k F)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}), \end{aligned} \tag{288}$$

и

$$\begin{aligned} &fF\partial_i\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) = fF\utilde{\partial}_i\utilde{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x}) = F\utilde{\partial}_i\utilde{\partial}_k(f\delta^3(x-\tilde{x})) = F\utilde{\partial}_i\utilde{\partial}_k(\utilde{f}\delta^3(x-\tilde{x})) = \\ &= F\utilde{\partial}_i\left((\utilde{\partial}_k\utilde{f})\delta^3(x-\tilde{x}) + \utilde{f}\utilde{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x})\right) = \\ &= F(\utilde{\partial}_i\utilde{\partial}_k\utilde{f})\delta^3(x-\tilde{x}) + F(\utilde{\partial}_k\utilde{f})\utilde{\partial}_i\delta^3(x-\tilde{x}) + F(\utilde{\partial}_i\utilde{f})\utilde{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x}) + F\utilde{f}\utilde{\partial}_i\utilde{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x}) = \\ &= F\utilde{f}\utilde{\partial}_i\utilde{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x}) - F(\utilde{\partial}_k\utilde{f})\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - F(\utilde{\partial}_i\utilde{f})\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) + F(\partial_i\partial_k f)\delta^3(x-\tilde{x}) = \\ &= F\utilde{f}\utilde{\partial}_i\utilde{\partial}_k\delta^3(x-\tilde{x}) - F(\partial_k f)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - F(\partial_i f)\partial_k\delta^3(x-\tilde{x}) + F(\partial_i\partial_k f)\delta^3(x-\tilde{x}), \end{aligned} \tag{289}$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&fF\partial_i\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x})=\\
&\qquad=\underset{\sim}{f}F\underset{\sim}{\partial_i}\underset{\sim}{\partial_k}\delta^3(x-\tilde{x})-F(\partial_i f)\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})-F(\partial_k f)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x}).
\end{aligned}
\tag{290}
$$

Вместе с (288) и (290) это дает

$$
\begin{aligned}
&f\underset{\sim}{F}\partial_i\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x})=\\
&=\underset{\sim}{f}F\underset{\sim}{\partial_i}\underset{\sim}{\partial_k}\delta^3(x-\tilde{x})+(f\partial_i F-F\partial_i f)\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})+(f\partial_k F-F\partial_k f)-(x\leftrightarrow\widetilde{x}),
\end{aligned}
\tag{291}
$$

но

$$
\underset{\sim}{f}F\underset{\sim}{\partial_i}\underset{\sim}{\partial_k}\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x})=-\Big(f\underset{\sim}{F}\partial_i\partial_i\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x})\Big)\,.
\tag{292}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&2f\underset{\sim}{F}\partial_i\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x})=\\
&\qquad=(f\partial_i F-F\partial_i f)\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})+(f\partial_k F-F\partial_k f)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x}).
\end{aligned}
\tag{293}
$$

Мы имеем формулы

$$
\delta^3(x-\widetilde{x})=\delta^3(\widetilde{x}-x),
\tag{294}
$$

$$
\partial_k\delta^3(x-\widetilde{x})=-\underset{\sim}{\partial_k}\delta^3(\widetilde{x}-x),
\tag{295}
$$

$$
\partial_i\partial_k\delta^3(x-\widetilde{x})=\underset{\sim}{\partial_i}\underset{\sim}{\partial_k}\delta^3(\widetilde{x}-x),
\tag{296}
$$

$$
\underset{\sim}{f}\delta^3(x-\tilde{x})=f\delta^3(x-\tilde{x}),
\tag{297}
$$

$$
f\underset{\sim}{F}\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x})=0,
\tag{298}
$$

$$
f\underset{\sim}{F}\varphi\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x})=f\underset{\sim}{F}\underset{\sim}{\varphi}\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x}),
\tag{299}
$$

$$
2f\underset{\sim}{F}\partial_i\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x})=(f\partial_i F-F\partial_i f)\partial_k\delta^3(x-\tilde{x})+(f\partial_k F-F\partial_k f)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}).
\tag{300}
$$

Возвращаясь к (281) можно теперь написать

$$
\begin{aligned}
\Big\{\mathcal{H}_0,\underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\Big\}&=2\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{J}}^{np,lm}\partial_n\partial_p\delta^3(x-\tilde{x})-4\mathcal{J}_{ik,lm}P^{ik}\mathcal{J}^{nm,rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}\partial_n\delta^3(x-\tilde{x})+\\
&\qquad+2P^{ik}\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}\partial_n\delta^3(x-\tilde{x})-(x\leftrightarrow\widetilde{x}).
\end{aligned}
\tag{301}
$$

Использовано (295), (296), (299) и равенство $\mathcal{J}_{ik,lm}\mathcal{J}^{np,lm}=\delta^{np}_{ik}$.

Теперь применим (300). Учитывая, что $\gimel^{np,lm} = \gimel^{pn,lm}$ и что вследствие равенства

$$\gimel_{ik,lm}\gimel^{rs,lm} = \delta^{rs}_{ik} \tag{302}$$

выполняется сотношение

$$\gimel_{ik,lm}\partial_q\gimel^{np,lm} = -\gimel^{np,lm}\partial_q\gimel_{ik,lm}, \tag{303}$$

находим на основе (300), что

$$\begin{aligned}
&2\gimel_{ik,lm}P^{ik}\underset{\sim}{\gimel}^{np,lm}\partial_n\partial_p\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = \\
&= \left(\gimel_{ik,lm}P^{ik}\partial_n\gimel^{np,lm} - \gimel^{np,lm}\partial_n(\gimel_{ik,lm}P^{ik})\right)\partial_p\delta^3(x-\tilde{x}) + \\
&\qquad + \left(\gimel_{ik,lm}P^{ik}\partial_p\gimel^{np,lm} - \gimel^{np,lm}\partial_p(\gimel_{ik,lm}P^{ik})\right)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = \\
&\qquad = -2\left(2\gimel^{np,lm}(\partial_p\gimel_{ik,lm})P^{ik} + \gimel^{np,lm}\gimel_{ik,lm}\partial_p P^{ik}\right)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = \\
&\qquad\qquad = -2\left(2\gimel^{np,lm}(\partial_p\gimel_{ik,lm})P^{ik} + \partial_p P^{pn}\right)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}).
\end{aligned} \tag{304}$$

Равенство (301) примет вид

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = -2\left(\partial_p P^{np} + \left(2\gimel^{np,lm}(\partial_p\gimel_{ik,lm}) + 2\gimel_{ik,lm}\gimel^{nm,rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}\right)P^{ik}\right)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - \\ -(x \leftrightarrow \widetilde{x}). \tag{305}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\beta}}\partial_p P^{pn} = \partial_p\left(\frac{P^{pn}}{\sqrt{\beta}}\right) - \sqrt{\beta}\left(\partial_p\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\frac{P^{pn}}{\sqrt{\beta}} = \partial_p\left(\frac{P^{np}}{\sqrt{\beta}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\beta}}(\partial_p\sqrt{\beta})\frac{P^{np}}{\sqrt{\beta}} = \\
= \partial_p\left(\frac{P^{pn}}{\sqrt{\beta}}\right) + \overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}\frac{P^{np}}{\sqrt{\beta}},
\end{aligned} \tag{306}$$

запишем (305) в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\beta\underset{\sim}{\beta}}}\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = -2\Big\langle\partial_p\left(\frac{P^{pn}}{\sqrt{\beta}}\right) + \overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}\frac{P^{np}}{\sqrt{\beta}} + \\
&+\left(2\gimel^{np,lm}(\partial_p\gimel_{ik,lm}) + 2\gimel_{ik,lm}\gimel^{nm,rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}\right)\frac{P^{ik}}{\sqrt{\beta}}\Big\rangle\partial_n\left(\frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}}\right) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}).
\end{aligned} \tag{307}$$

В силу равенства

$$\int d^3x\sqrt{\beta}\frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}}f(x) = f(\widetilde{x}), \tag{308}$$

где $d^3x\sqrt{\beta}$ инвариантный элемент объема, а $f(x)$ – любая скалярная функция, можно считать, что выражение

$$\frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\beta}} = \frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}} = \frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{(\beta\underset{\sim}{\beta})^{\frac{1}{4}}} \tag{309}$$

есть скаляр по x^i и скаляр по $\tilde{x}^i$. Поэтому символ

$$\partial_n \left(\frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}} \right) \tag{310}$$

ведет себя как ковариантный вектор по x^n и как скаляр по $\tilde{x}^i$, если этот символ сворачивается по индексу n относительно координаты x^i. Выражение в специальных скобках в равенстве (307) не зависит от $\tilde{x}^i$. Поэтому и весь член правой части (307), содержит $\partial_n \left(\frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}} \right)$, ведет себя как скаляр по $\tilde{x}^i$. Аналогично величина$-(x \leftrightarrow \tilde{x})$ в (307) ведет себя как скаляр по x^i. Но (307) есть скаляр по x^i и $\tilde{x}^i$. Поэтому член правой части (307), выписанный явно (содержащий $\partial_n \left(\frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}} \right)$) есть скаляр по x^i (как разность двух скаляров по x^i). Так как $\partial_n \left(\frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}} \right)$ есть ковариантный вектор по x^i, то выражение в скобках (307) есть ковариантный вектор по индексу n относительно координаты x^μ. Существенно, что выражение $\partial_n \delta^3(x-\tilde{x})$, будучи проинтегрировано по $\tilde{x}$ после умножения на произвольную скалярную функцию $f(\tilde{x})$, дает произвольный вектор относительно x^i.

Введем теперь систему координат, локально геодезическую в точке x^i, но, вообще говоря, не в точке $\tilde{x}^i$. В этой системе в точке x^i

$$\partial_k \beta_{il} = 0, \quad \overset{3}{\Gamma}{}^i_{kl} = 0, \quad \partial_r \mathcal{J}_{ik,lm} = 0. \tag{311}$$

Поскольку выражение в скобках (307) зависит только от x^i, но не от $\tilde{x}^i$, то в локально геодезических координатах x^i:

$$\mathcal{Q}^n \equiv \langle \dots \rangle = \partial_p \left(\frac{P^{pn}}{\sqrt{\beta}} \right) = \overset{3}{\nabla}_p \left(\frac{P^{np}}{\sqrt{\beta}} \right). \tag{312}$$

Мы принимает во внимание, что $\frac{P^{pn}}{\sqrt{\beta}}$ есть 3-мерный тензор. Уравнение (312) общековариантно, и это верно в любой системе координат. Так

$$\left\{ \mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0} \right\} = -2\sqrt{\beta \underset{\sim}{\beta}}\, \nabla_p \left(\frac{P^{pn}}{\sqrt{\beta}} \right) \partial_n \left(\frac{\delta^3(x-\tilde{x})}{\sqrt{\underset{\sim}{\beta}}} \right) - (x \leftrightarrow \tilde{x}), \tag{313}$$

или

$$\left\{ \mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0} \right\} = -2\sqrt{\beta} \left(\nabla_p \left(\frac{P^{pn}}{\sqrt{\beta}} \right) \right) \partial_n \delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \tilde{x}). \tag{314}$$

Заметим, что в приведенном рассуждении было существенно, что $\mathcal{Q}$ в (307) зависит только от x^μ. Применение подобных рассуждений непосредственно к равенству (281) до его преобразования к виду (307) может привести к ошибке, так как $\partial_n \partial_p \delta^3(x-\tilde{x})$ в (281) зависит и от x^μ, и от $\tilde{x}^\mu$.

Выведем (313) из (307) прямым вычислением, без использования геодезических координат. Имеем

$$\Big\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\Big\} = -2\Bigg(\partial_p P^{np} + \Bigg(2\eth^{np,lm}\partial_p\left(\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\right)\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\right)\eth_{ik,lm}\right) +$$

$$+2\eth_{ik,lm}\eth^{nm,rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}\Bigg)P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\Bigg(\partial_p P^{pn} + \Bigg(2\sqrt{\beta}\partial_p\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\delta^{pn}_{ik} + 2\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\eth^{np,lm}\right)\partial_p\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\eth_{ik,lm}\right) +$$

$$+2\eth_{ik,lm}\eth^{nm,rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}\Bigg)P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x})\Bigg) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}). \quad (315)$$

Так как

$$\sqrt{\beta}\partial_p\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = -\frac{\partial_p\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} = -\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}, \quad (316)$$

$$\Big\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\Big\} = -2\Bigg(\partial_p P^{pn}\Bigg(2\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\eth^{np,lm}\right)\partial_p\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\eth_{ik,lm}\right) +$$

$$+2\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\eth_{ik,lm}\right)\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}}\eth^{nm,rs}\right)\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}\Bigg)P^{ik} - 2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}). \quad (317)$$

Согласно (272), (273) имеем

$$\Big\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\Big\} = -2\Bigg(\partial_p P^{pn} + \Bigg(\frac{1}{2}\left(\beta^{nl}\beta^{pm} + \beta^{nm}\beta^{pl} - 2\beta^{np}\beta^{lm}\right) +$$

$$+\partial_p\Big(\beta_{il}\beta_{km} + \beta_{im}\beta_{kl} - \beta_{ik}\beta_{lm}\Big) +$$

$$+2\left(\beta_{il}\beta_{km} + \beta_{im}\beta_{kl} - \beta_{ik}\beta_{lm}\right)\frac{1}{4}\left(\beta^{nr}\beta^{ms} + \beta^{ns}\beta^{mr} - 2\beta^{nm}\beta^{rs}\right)\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}\Bigg) -$$

$$-2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}), \quad (318)$$

т. е.

$$\Big\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\Big\} = -2\Bigg(\partial_p P^{pn} - 2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik} + \Bigg(\frac{1}{2}\Big(2\beta^{nl}\beta^{pm} - 2\beta^{np}\beta^{lm}\Big)\partial_p\Big(2\beta_{il}\beta_{km} - \beta_{ik}\beta_{lm}\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(2\beta_{il}\beta_{km} - \beta_{ik}\beta_{lm}\Big)\Big(2\beta^{nr}\beta^{ms} - 2\beta^{mn}\beta^{rs}\Big)\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}\Bigg)P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\Bigg(\partial_p P^{pn} + \Bigg(\Big(\beta^{nl}\beta^{pm} - \beta^{np}\beta^{lm}\Big)\partial_p\Big(2\beta_{il}\beta_{km} - \beta_{ik}\beta_{lm}\Big) +$$

$$+\Big(2\beta_{il}\beta_{km} - \beta_{ik}\beta_{lm}\Big)\Big(\beta^{nr}\beta^{ms} - \beta^{mn}\beta^{rs}\Big)\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}\Bigg)P^{ik} -$$

$$-2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x-\tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\Bigg(\partial_n P^{pn} - 2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik} + \Bigg(\left(\beta^{nl}\beta^{pm} - \beta^{np}\beta^{lm}\right)\left(2\left(\partial_p\beta_{il}\right)\beta_{km} + 2\beta_{il}\partial_p\beta_{km} - \partial_p\beta_{ik}\right)\beta_{lm} -$$

$$-\beta_{ik}\partial_p\beta_{lm}\Bigg) + \left(2\delta^s_k\beta_{il}\beta^{nr} - 2\delta^n_k\beta_{il}\beta^{rs} - \delta^s_l\beta_{ik}\beta^{nr} + \delta^n_l\beta_{ik}\beta^{rs}\right)\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}\Bigg)P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x - \tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\Bigg(\partial_n P^{pn} - 2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik} + \Bigg(2\beta^{nl}\delta^p_k\partial_p\beta_{il} + 2\delta^n_i\beta^{pm}\partial_p\beta_{km} - \beta^{np}\partial_p\beta_{ik} - \beta_{ik}\beta^{nl}\beta^{pm}\partial_p\beta_{lm} -$$

$$-2\delta^l_k\beta^{np}\partial_p\beta_{il} - 2\beta^{np}\partial_p\beta_{ik} + 3\beta^{np}\partial_p\beta_{ik} + \beta_{ik}\beta^{np}\beta^{lm}\partial_p\beta_{lm}\Bigg)P^{ik} +$$

$$+\Bigg(2\beta_{il}\beta^{nr}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rk} - 2\delta^n_k\beta_{il}\beta^{rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs} - \beta_{ik}\beta^{nr}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rl} + \beta_{ik}\beta^{rs}\overset{3}{\Gamma}{}^n_{rs}\Bigg)P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x - \tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\Bigg(\partial_p P^{pn} - 2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik} + 2\beta^{nl}(\partial_k\beta_{il})P^{ik} + 2\beta^{pm}(\partial_p\beta_{km})P^{nk} -$$

$$-\beta^{nl}\beta^{pm}\beta_{ik}(\partial_p\beta_{lm})P^{ik} - 2\beta^{np}(\partial_p\beta_{ik})P^{ik} +$$

$$+\beta^{np}\beta^{lm}(\partial_p\beta_{lm})\beta_{ik}P^{ik} + 2\beta_{il}\beta^{nr}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rk}P^{ik} - 2\beta_{il}\beta^{rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}P^{in} -$$

$$-\beta^{nr}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rl}\beta_{ik}P^{ik} + \beta^{rs}\overset{3}{\Gamma}{}^n_{rs}\beta_{ik}P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x - \tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\Bigg(\partial_p P^{pn} - 2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik} + 2\beta^{nl}(\overset{3}{\Gamma}_{i,kl} + \overset{3}{\Gamma}_{l,ki})P^{ik} + 2\beta^{pn}(\overset{3}{\Gamma}_{k,pm} + \overset{3}{\Gamma}_{m,pk})P^{nk} -$$

$$-\beta^{nl}\beta^{pm}\beta_{ik}(\overset{3}{\Gamma}_{l,pm} + \overset{3}{\Gamma}_{m,lp})P^{ik} - 2\beta^{pn}(\overset{3}{\Gamma}_{i,pk} + \overset{3}{\Gamma}_{k,ip})P^{ik} +$$

$$+\beta^{np}\beta^{lm}(\overset{3}{\Gamma}_{l,pm} + \overset{3}{\Gamma}_{m,pl}\beta_{ik}P^{ik} + 2\beta_{il}\beta^{nr}\overset{3}{\Gamma}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{kr}P^{ik} -$$

$$-2\beta_{il}\beta^{rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}P^{in} - \beta^{nr}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rl}\beta_{ik}P^{ik} + \beta^{rs}\overset{3}{\Gamma}{}^n_{rs}\beta_{ik}P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x - \tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\Bigg(\partial_p P^{pn} - 2\overset{3}{\Gamma}{}^l_{pl}P^{pn} - \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik} + 2\beta^{nl}\beta_{it}\overset{3}{\Gamma}{}^t_{kl}P^{ik} + 2\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik} +$$

$$+2\beta^{pm}\beta_{it}\overset{3}{\Gamma}{}^t_{pm}P^{ni} + 2\overset{3}{\Gamma}{}^p_{kp}P^{kn} - \beta^{pm}\beta_{ik}\overset{3}{\Gamma}{}^n_{pm}P^{ik} - \beta^{ln}\beta_{ik}\overset{3}{\Gamma}{}^p_{pl}P^{ik} -$$

$$-4\beta^{pn}\beta_{it}\overset{3}{\Gamma}{}^t_{kp}P^{ik} + 2\beta^{np}\overset{3}{\Gamma}{}^m_{pm}\beta_{ik}P^{ik} + 2\beta_{it}\beta^{nl}\overset{3}{\Gamma}{}^t_{lk}P^{ik} - 2\beta_{il}\beta^{rs}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rs}P^{in} -$$

$$-\beta^{nr}\overset{3}{\Gamma}{}^l_{rl}\beta_{ik}P^{ik} + \beta^{rs}\overset{3}{\Gamma}{}^n_{rs}\beta_{ik}P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x - \tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) =$$

$$= -2\Bigg(\partial_p P^{pn} + \overset{3}{\Gamma}{}^n_{ik}P^{ik}\Bigg)\partial_n\delta^3(x - \tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}), \quad (319)$$

Таким образом

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = -2\left(\partial_i P^{ik} + \overset{3}{\Gamma}{}^k_{il}P^{il}\right)\partial_k\delta^3(x - \tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}). \quad (320)$$

но

$$\beta^{ik}\mathcal{H}_k = -2\beta^{ik}\sqrt{\beta}\beta_{km}\overset{3}{\nabla}_n\left(\frac{P^{nm}}{\sqrt{\beta}}\right) = -2\sqrt{\beta}\overset{3}{\nabla}_n\left(\frac{P^{ni}}{\sqrt{\beta}}\right) =$$

$$= -2\sqrt{\beta}\left(\partial_n\left(\frac{P^{ni}}{\sqrt{\beta}}\right) + \overset{3}{\Gamma}{}^n_{nl}\left(\frac{P^{li}}{\sqrt{\beta}}\right) + \overset{3}{\Gamma}{}^i_{nl}\left(\frac{P^{nl}}{\sqrt{\beta}}\right)\right) =$$

$$= -2\left(\sqrt{\beta}\left(\partial_n\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)P^{ni} + \partial_n P^{ni} + \overset{3}{\Gamma}{}^n_{nl}P^{li} + \overset{3}{\Gamma}{}^i_{nl}P^{nl}\right) =$$

$$= -2\left(\partial_n P^{ni} + \overset{3}{\Gamma}{}^i_{nl} P^{nl} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}(\partial_n \sqrt{\beta}) P^{ni} + \overset{3}{\Gamma}{}^n_{nl} P^{li}\right) = -2\left(\partial_n P^{ni} + \overset{3}{\Gamma}{}^i_{nl} P^{nl}\right), \quad (321)$$

так, что

$$\beta^{ki}\mathcal{H}_i = -2\left(\partial_i P^{ik} + \overset{3}{\Gamma}{}^k_{il} P^{il}\right) \quad (322)$$

и

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = \beta^{ki}\mathcal{H}_i \partial_k \delta^3(x - \tilde{x}) - (x \leftrightarrow \widetilde{x}) = \beta^{ki}\mathcal{H}_i \partial_k \delta^3(x - \tilde{x}) - \underset{\sim}{\beta^{ki}} \underset{\sim}{\mathcal{H}_i} \underset{\sim}{\partial_k} \delta^3(x - \tilde{x}). \quad (323)$$

Вместе с (265), (272) это дает замкнутую алгебру связей (в классике):

$$\left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_k}\right\} = \mathcal{H}_k \partial_i \delta^3(x - \tilde{x}) - \underset{\sim}{\mathcal{H}_i} \underset{\sim}{\partial_k} \delta^3(x - \tilde{x}), \quad (324)$$

$$\left\{\mathcal{H}_i, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = \mathcal{H}_0 \partial_i \delta^3(x - \tilde{x}), \quad (325)$$

$$\left\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}_0}\right\} = \beta^{ki}\mathcal{H}_k \partial_i \delta^3(x - \tilde{x}) - \underset{\sim}{\beta^{ki}} \underset{\sim}{\mathcal{H}_k} \underset{\sim}{\partial_i} \delta^3(x - \tilde{x}). \quad (326)$$

Этим заканчивается построение классического канонического формализма АДМ. Оператор $\mathcal{H}_0$ имеет смысл генератора сдвига по направлению, перпендикулярному поверхности $x^0 = const$ (в смысле псевдоевклидовой метрики).

7 Классический канонический формализм Фаддеева-Попова

Формализм Фаддеева-Попова (ФП) получается из формализма АДМ каноническим преобразованием. Здесь формализм ФП переведен в сигнатуру $(- + ++)$ (в первой работе ФП [2] использовалась сигнатура $(+ - --)$). ФП полагают

$$h^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \quad (327)$$

($h^{\mu\nu}_{\text{здесь}} = -h^{\mu\nu}_{\text{ФП}}$), а затем вводят вместо β^{ik} обобщенные координаты

$$q^{ik} \equiv h^{i0}h^{k0} - h^{00}h^{ik}. \quad (328)$$

Свяжем q^{ik} и β^{ik}. Имеем

$$\beta^{ik} = \frac{g^{00}g^{ik} - g^{i0}g^{k0}}{g^{00}}, \quad (329)$$

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{\beta}, \quad (330)$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}, \quad g^{00} = -\frac{1}{N^2}. \quad (331)$$

Поэтому, согласно (327), (328),

$$q^{ik} = (-g)(g^{i0}g^{k0} - g^{00}g^{ik}) = N^2\beta(-g^{00})\beta^{ik} = N^2\beta\frac{1}{N^2}\beta^{ik} = \beta\beta^{ik}, \tag{332}$$

так, что

$$q^{ik} = \beta\beta^{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ilm}\varepsilon^{knp}\beta_{ln}\beta_{mp}. \tag{333}$$

Отсюда

$$q \equiv \det q^{ik} = \beta^3\beta^{-1} = \beta^2, \tag{334}$$

$$\beta = \sqrt{q}. \tag{335}$$

По (335), (333)

$$\beta^{ik} = \frac{1}{\sqrt{q}}q^{ik}, \tag{336}$$

$$\beta_{ik} = \frac{\beta}{2}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{knp}\beta^{ln}\beta^{mp} = \frac{\sqrt{q}}{2}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{knp}\frac{q^{ln}}{\sqrt{q}}\frac{q^{mp}}{\sqrt{q}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{knp}\frac{q^{ln}q^{mp}}{\sqrt{q}}. \tag{337}$$

Определим теперь импульсы π_{ik}, сопряженные с переменными q^{ik}, из условия

$$\pi_{ik}\partial_0 q^{ik} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik}. \tag{338}$$

Тогда преобразование от переменных β_{ik}, P^{ik} к q^{ik}, π_{ik} будет каноническим.

Имеем по (333)

$$\begin{aligned}\partial_0 q^{ik} = \partial_0(\beta\beta^{ik}) = \beta\beta^{rs}(\partial_0\beta_{rs})\beta^{ik} - \beta\beta^{ir}\beta^{ks}\partial_0\beta_{rs} = \\ = -2\beta\left(\frac{1}{4}\left(\beta^{ir}\beta^{ks} + \beta^{is}\beta^{kr} - 2\beta^{ik}\beta^{rs}\right)\right)\partial_0\beta_{rs},\end{aligned} \tag{339}$$

откуда, согласно (147),

$$\partial_0 q^{ik} = -2(2\varkappa)\sqrt{\beta}\,\daleth^{ik,rs}\partial_0\beta_{rs}, \tag{340}$$

и, значит,

$$\partial_0\beta_{lm} = -\frac{1}{2(2\varkappa)\sqrt{\beta}}\daleth_{lm,ik}\partial_0 q^{ik}. \tag{341}$$

Поэтому

$$P^{ik}\partial_0\beta_{ik} = -P^{ik}\frac{1}{2(2\varkappa)\sqrt{\beta}}\daleth_{ik,lm}\partial_0 q^{lm}. \tag{342}$$

Полагая

$$\pi_{lm} = -\frac{1}{2(2\varkappa)\sqrt{\beta}}\daleth_{lm,ik}P^{ik}, \tag{343}$$

имеем

$$\pi_{lm}\partial_0 q^{lm} = P^{ik}\partial_0\beta_{ik}. \tag{344}$$

Согласно (160) и (343)

$$\pi_{lm} = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{\beta}}K_{lm}. \tag{345}$$

По (43)

$$K_{lm} = -\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}}\Gamma^0_{lm}, \tag{346}$$

так, что

$$\pi_{lm} = -\frac{1}{2\varkappa\sqrt{\beta}\sqrt{-g^{00}}}\Gamma^0_{lm} = -\frac{N}{2\varkappa\sqrt{-g}\sqrt{-g^{00}}}\Gamma^0_{lm} = \frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}g^{00}}\Gamma^0_{lm} = \frac{1}{2\varkappa h^{00}}\Gamma^0_{lm}. \tag{347}$$

Эта формула приведена в работе ФП [2] (где положено $2\varkappa = 1$). Из (343), (147), (333), (335) имеем

$$P^{ik} = -2(2\varkappa)\sqrt{\beta}\mathcal{J}^{ik,lm}\pi_{lm} = -2(2\varkappa)\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa}\right)\left(\beta^{il}\beta^{km} + \beta^{im}\beta^{km} - 2\beta^{ik}\beta^{lm}\right)\pi_{lm} =$$
$$= -\frac{1}{\beta}\left(q^{il}q^{km} - q^{ik}q^{lm}\right)\pi_{lm} = \frac{1}{\sqrt{q}}\left(q^{ik}q^{lm} - q^{il}q^{km}\right)\pi_{lm}. \tag{348}$$

Учитывая (148), можем записать (343) также в виде

$$\pi_{ik} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2}\beta_{ik}\beta_{lm} - \beta_{il}\beta_{km}\right)P^{lm}. \tag{349}$$

Собирая вместе формулы (333), (335), (343), (349), (348), имеем

$$q^{ik} = \beta\beta^{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ilm}\varepsilon^{knp}\beta_{ln}\beta_{mp}, \tag{350}$$

$$\beta_{ik} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\varepsilon^{ilm}\varepsilon^{knp}q^{ln}q^{mp}, \tag{351}$$

$$\pi_{ik} = -\frac{1}{2(2\varkappa)\sqrt{\beta}}\mathcal{J}_{ik,lm}P^{lm} = \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2}\beta_{ik}\beta_{lm} - \beta_{il}\beta_{km}\right)P^{lm}, \tag{352}$$

$$P^{lm} = \frac{1}{\sqrt{q}}\left(q^{ik}q^{lm} - q^{li}q^{mk}\right)\pi_{ik}. \tag{353}$$

Эти формулы описывают каноническое преобразование, связывающее переменные АДМ и ФП.

Выразим $\mathcal{H}_i$ и $\mathcal{H}_0$ через q^{ik} и π_{ik}. По (176)

$$\mathcal{H}_i = -2\beta_{is}\sqrt{\beta}\overset{3}{\nabla}_l\left(\frac{P^{ls}}{\sqrt{\beta}}\right). \tag{354}$$

Согласно (350) и (335) величина

$$\frac{q^{ik}}{\sqrt{q}} = \beta^{ik} \tag{355}$$

есть 3-тензор, поскольку $\pi_{ik} q^{ik}/\sqrt{\beta}$ есть 3-инвариант (так как входит в действие в виде $\int d^3x \sqrt{\beta} \pi_{ik} \partial_0 q^{ik}$). Следовательно, по (355), (335) величина

$$\left(\frac{q^{ik}}{\sqrt{q}} \right) = q^{\frac{1}{4}} \pi_{ik} \tag{356}$$

есть 3-тензор. По (353), (335), (350),

$$P^{lm} = \frac{1}{\beta} \left(\beta \beta^{lm} \beta \beta^{ik} - \beta \beta^{li} \beta \beta^{mk} \right) \pi_{ik} = \beta \left(\beta^{lm} \beta^{ik} - \beta^{li} \beta^{mk} \right) \pi_{ik}, \tag{357}$$

$$\frac{P^{lm}}{\sqrt{\beta}} = \left(\beta^{lm} \beta^{ik} - \beta^{li} \beta^{mk} \right) \sqrt{\beta} \pi_{ik}, \tag{358}$$

$$\frac{P^{lm}}{\sqrt{\beta}} = \left(\beta^{lm} \beta^{rs} - \beta^{ir} \beta^{mk} \right) q^{\frac{1}{4}} \pi_{ik}. \tag{359}$$

Поскольку $(q^{\frac{1}{4}} \pi_{ik})$ тензор, то,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_i &= -2\beta_{im} \sqrt{\beta} \overset{3}{\nabla}_l \left(\frac{P^{lm}}{\sqrt{\beta}} \right) = -2\beta_{im} \sqrt{\beta} \overset{3}{\nabla}_l \left(\left(\beta^{lm} \beta^{rs} - \beta^{lr} \beta^{ms} \right) q^{\frac{1}{4}} \pi_{rs} \right) = \\
&= -2\beta_{im} \sqrt{\beta} \left(\beta^{lm} \beta^{rs} - \beta^{lr} \beta^{ms} \right) \overset{3}{\nabla}_l \left(q^{\frac{1}{4}} \pi_{rs} \right) = -2\sqrt{\beta} \left(\delta^l_i \beta^{rs} - \beta^{lr} \delta^s_i \right) \overset{3}{\nabla}_l \left(q^{\frac{1}{4}} \pi_{rs} \right) = \\
&= -2\sqrt{\beta} \left(\beta^{rs} \overset{3}{\nabla}_i \left(q^{\frac{1}{4}} \pi_{rs} \right) - \beta^{lr} \overset{3}{\nabla}_l \left(q^{\frac{1}{4}} \pi_{ri} \right) \right) = \\
&= -2 \frac{1}{q^{\frac{1}{4}}} \left(q^{rs} \overset{3}{\nabla}_i \left(q^{\frac{1}{4}} \pi_{rs} \right) - q^{rs} \overset{3}{\nabla}_r \left(q^{\frac{1}{4}} \pi_{is} \right) \right).
\end{aligned} \tag{360}$$

Далее по (353), (335), (147), (149)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \mathcal{J}_{ik,lm} P^{ik} P^{lm} &= \frac{1}{2} \mathcal{J}_{ik,lm} \frac{1}{\sqrt{q}} \left(q^{ik} q^{rs} - q^{ir} q^{ks} \right) \pi_{rs} \frac{1}{\sqrt{q}} \left(q^{lm} q^{pq} - q^{lp} q^{mq} \right) \pi_{pq} = \\
&= \mathcal{J}_{ik,lm} \frac{1}{4\beta} \left(2q^{ik} q^{rs} - q^{ir} q^{ks} - q^{is} q^{kr} \right) \pi_{rs} \frac{1}{\sqrt{q}} \left(q^{lm} q^{pq} - q^{lp} q^{mq} \right) \pi_{pq} = \\
&= -\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}} \right) \mathcal{J}_{ik,lm} \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\varkappa} \right) \beta \left(\beta^{ir} \beta^{ks} + \beta^{is} \beta^{kr} - 2\beta^{ik} \beta^{rs} \right) \pi_{rs} \frac{1}{\sqrt{q}} \left(q^{lm} q^{pq} - q^{lp} q^{mq} \right) \pi_{pq} = \\
&= -\left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}} \right) \beta \mathcal{J}_{ik,lm} \mathcal{J}^{ik,rs} \pi_{rs} \frac{1}{\sqrt{q}} \left(q^{lm} q^{pq} - q^{lp} q^{mq} \right) \pi_{pq} = \\
&= \left(\frac{2\varkappa}{\sqrt{\beta}} \right) \beta \delta^{rs}_{lm} \pi_{rs} \frac{1}{\sqrt{q}} \left(q^{lp} q^{mq} - q^{lm} q^{pq} \right) \pi_{pq} = (2\varkappa) q^{-\frac{1}{4}} \left(q^{lp} q^{mq} - q^{lm} q^{pq} \right) \pi_{lm} \pi_{pq}.
\end{aligned} \tag{361}$$

Отсюда по (175), (335) для замкнутой Вселенной

$$\mathcal{H}_0 = \left(\frac{2\varkappa}{q^{\frac{1}{4}}} \right) \left(q^{lp} q^{mq} - q^{lm} q^{pq} \right) \pi_{lm} \pi_{pq} - \left(\frac{q^{\frac{1}{4}}}{2\varkappa} \right) \left(\overset{3}{R} - 2\Lambda \right). \tag{362}$$

В случае асимптотически 3-мерно плоской открытой модели в (362) нужно положить $\Lambda = 0$. В этом случае в $\mathcal{L}_{(1)}$ из (181) содержится член

$$-\frac{1}{2\varkappa}(\partial_i\partial_k\beta_{ik} - \partial_k\partial_k\beta_{ll}) = -\frac{1}{2\varkappa}\partial_k(\partial_i\beta_{ik} - \partial_k\beta_{ll}). \tag{363}$$

В выражении $\partial_i\beta_{ik} - \partial_k\beta_{kl}$, можно отбросить все величины, убывающие при $x^ix^i \longrightarrow \infty$ быстрее, чем $(x^ix^i)^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Имеем по (335), (349)

$$\begin{gathered}\partial_k(\partial_i\beta_{ik} - \partial_k\beta_{ii}) = \partial_k(-\beta_{im}\beta_{kn}\partial_i\beta^{mn} - \partial_k\beta_{ii}) \approx \\ \approx \partial_k(-\delta_{im}\delta_{kn}\partial_i\beta^{mn} - \partial_k\beta_{ii}) = -\partial_k\left(\partial_i\beta^{ik} + \partial_k\beta_{ii}\right) = \\ -\partial_k\left(\partial_i\left(\frac{q^{ik}}{\beta}\right) + \partial_k\beta_{ii}\right) = -\partial_k\left(\frac{1}{\beta}\partial_i q^{ik} + q^{ik}\partial_i\left(\frac{1}{\beta}\right) + \partial_k\beta_{ii}\right) \approx \\ \approx -\partial_k\partial_i q^{ik} - \partial_k\left(\partial_k\left(\frac{1}{\beta}\right) + \partial_k\beta_{ii}\right) = -\partial_k\partial_i q^{ik} - \partial_k\left(-\frac{1}{\beta^2}\partial_k\beta + \partial_k\beta_{ii}\right) \approx \\ \approx -\partial_k\partial_i q^{ik} - \partial_k\left(-\partial_k\beta + \partial_k\beta_{ii}\right) = -\partial_k\partial_i q^{ik}\partial_k\left(-\beta\beta^{il}\partial_k\beta_{il} + \partial_k\beta_{ii}\right) \approx \\ \approx -\partial_k\partial_i q^{ik} - \partial_k\left(-\delta^{il}\partial_k\beta_{il} + \partial_k\beta_{ii}\right) = -\partial_k\partial_i q^{ik} - \partial_k\left(-\partial_k\beta_{ii} + \partial_k\beta_{ii}\right) = -\partial_k\partial_i q^{ik},\end{gathered} \tag{364}$$

где $\approx$ означает "с нужной точностью" при $x^ix^i \longrightarrow \infty$.

Поэтому, согласно (181), для открытой, 3-мерно асимптотически плоской модели

$$\mathcal{L}_{(1)} = \pi_{ik}\partial_0 q^{ik} - N\mathcal{H}_0 - N^i\mathcal{H}_i + \frac{1}{2\varkappa}\partial_i\partial_k q^{ik}, \tag{365}$$

причем $\mathcal{H}_i$ дается равенствами (359) а $\mathcal{H}_0$ – формулой (362) с $\Lambda = 0$. Для модели замкнутой Вселенной член $\frac{1}{2\varkappa}\partial_i\partial_k q^{ik}$ в (365) отсутствует, и можно положить $\Lambda \neq 0$ в $\mathcal{H}_0$ в формуле (362). Предполагается, что в формулах (359), (362) величины $\overset{3}{R}$ и $\overset{3}{\Gamma}{}^i_{kl}$ выражаются через q^{ik} с помощью равенств (350), (351).

В первой работе ФП [2] приведенное здесь выражение (365) для $\mathcal{L}_{(1)}$ записано в сигнатуре $(+---)$ и использованы величины

$$\lambda^0 = -\frac{N}{\sqrt{\beta}} + 1, \quad \lambda^i = -N^i, \tag{366}$$

$$C_0 = -\sqrt{\beta}\mathcal{H}_0, \quad C_i = -\mathcal{H}_i, \tag{367}$$

$$N = q^{\frac{1}{4}}(1 - \lambda^0), \quad \mathcal{H}_0 = -q^{-\frac{1}{4}}C_0 \tag{368}$$

вместо H_0, H_i, N, N^i. В итоге, в первой работе ФП [2] величина $\mathcal{L}_{(1)}$ для случая 3-мерно асимптотически плоской модели имеет вид

$$\mathcal{L}_{(1)} = \pi_{ik}\partial_0 q^{ik} - \lambda^0 C_0 - \lambda^i C_i - \left(-C_0 - \frac{1}{2\varkappa}\partial_i\partial_k q^{ik}\right). \tag{369}$$

ФП предлагают считать плотностью энергии величину $\left(-C_0 - \frac{1}{2\varkappa}\partial_i\partial_k q^{ik}\right)$. Поскольку, однако, есть связь $C_0 = 0$, то несущественно, включать ли $-C_0$ в плотность энергии. Тем не менее в полугеодезических координатах $\lambda^0 = 0$, $\lambda^i = 0$ и, согласно (369), в этих координатах $\left(-C_0 - \frac{1}{2\varkappa}\partial_i\partial_k q^{ik}\right)$ играет роль плотности гамильтониана.

8 Проблемы квантования

При квантовании переменные β_{ik}, P^{ik} заменяются операторами, подчиненными условиям

$$
\begin{aligned}
&[\beta_{ik}, \underset{\sim}{P}^{lm}] = i\delta_{ik}^{lm}\delta^3(x-\tilde{x}),\\
&[\beta_{ik}, \underset{\sim}{\beta}_{lm}] = [P^{ik}, \underset{\sim}{P}^{lm}] = 0,
\end{aligned}
\tag{370}
$$

где скобки [ ] означают коммутатор. Поскольку связи (175) и (176) слишком сложны, чтобы их можно было решить явно, эти связи обычно накладывают на вектор состояния. Возникающая теория оказывается корректной только при условии, что коммутаторы связей друг с другом равны линейным комбинациям этих связей, с коэффициентами, стоящими слева от них. После квантования связи удовлетворяют коммутационным соотношениям вида (324)-(326) с заменой скобок { } на $-i$[ ]. Однако теперь играет роль выбранный порядок множителей β_{ik} и P^{ik} в выражениях для связей. Может случиться, что результат коммутирования связей содержит эти множители не в том порядке, который был принят в связях первоначально, а коэффициенты в связях могут возникать не только слева от них. Легко убедиться, что в квантовых аналогах соотношений (324) и (325) этого не происходит и что указанные соотношения после квантования сохраняют свой вид (с точностью до замены { } $\to -i$[ ]). Последнее, в частности, обусловлено отмеченным геометрическим смыслом связей $\mathcal{H}_i$ как генераторов преобразований трехмерных координат. Этот смысл полностью сохраняется после квантования.

Иначе обстоит дело с квантовым аналогом соотношения (326). Если операторы в связях $\mathcal{H}_0$,$\mathcal{H}_i$ расположены так, что эти связи эрмитовы, то величина $-i[\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0]$, в которую превращается $\{\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0\}$, тоже будет эрмитовой. Значит, справа в аналоге равенства (326) не могут возникнуть неэрмитовы выражения $\beta^{ik}\mathcal{H}_k$ (мы учитываем, что β^{ik} и $\mathcal{H}_k$ не коммутируют). Самое большее, что можно получить для коммутатора $-i[\mathcal{H}_0, \underset{\sim}{\mathcal{H}}_0]$, подбирая порядок множителей в $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_k$ без нарушения эрмитовости – это выражение вида

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\beta^{ik}\mathcal{H}_k + \mathcal{H}_k\beta^{ki}\right)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\beta}^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{H}}_k + \underset{\sim}{\mathcal{H}}_k\underset{\sim}{\beta}^{ki}\right)\underset{\sim}{\partial}_i\delta^3(x-\tilde{x}) =\\
&= \beta^{ik}\mathcal{H}_k\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - \underset{\sim}{\beta}^{ik}\underset{\sim}{\mathcal{H}}_k\underset{\sim}{\partial}_i\delta^3(x-\tilde{x}) +\\
&\qquad\qquad + \delta^3(0)(\ldots)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x}) - \delta^3(0)\underset{\sim}{(\ldots)}\underset{\sim}{\partial}_i\delta^3(x-\tilde{x}),
\end{aligned}
\tag{371}
$$

где $(\ldots)$, $\underset{\sim}{(\ldots)}$ – некоторые операторнозначные функции, не равные нулю. Символы $\delta^3(0)$ возникают из-за коммутирования операторов β^{ik}, $\mathcal{H}_k$ или $\underset{\sim}{\beta}^{ik}$, $\underset{\sim}{\mathcal{H}}_k$, взятых в одной точке.

Ясно, что выражение вида (371), содержащие произведение $\delta^3(0)\partial_i\delta^3(x-\tilde{x})$, бессмысленно. Придать ему смысл можно только путем регуляризации. Вопрос заключается в том, можно ли так выбрать регуляризацию, чтобы лишние члены в выражении (371) обратились в нуль, а после снятия регуляризации восстановилась общековариантность теории. Однозначный ответ на этот вопрос до сих пор не получен. В ряде имеющихся работ проблема регуляризации и ее снятия изучена не достаточно строго. Такое положение обусловлено тем, что методы регуляризации подробно разработаны только в рамках теории возмущений. Здесь же задача поставлена вне этих рамок.

Несмотря на неясность, сохраняющуюся в данном вопросе, было проведено квантование теории гравитации методом континуального интеграла по аналогии с квантованием неабелевых калибровочных теорий (см. [2] и приведенную там литературу, а также книгу [6]). Если бы таким путем была получена удовлетворительная теория возмущений, то ее корректность можно было бы проверить непосредственно в рамках диаграммного формализма Фейнмана, и этого было бы достаточно. Но оказалось, что построенная теория возмущений неперенормируема. В связи с этим сейчас разрабатываются другие подходы к построению квантовой теории гравитации, наиболее известные из которых – это теория суперструн (см., например, [7]) и так называемая петлевая теория гравитации [8]. Главные идеи петлевой теории гравитации описаны во второй части данного пособия, которая называется "Квантование гравитации II. Реперный подход" . Как было упомянуто во Введении, мы не рассматриваем формализм функционального интеграла и теорию возмущений для гравитации. Этот материал подробно изложен в книге [6].

Список литературы

[1] *R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner.* "Gravitation: an introduction to current research", Louis Witten ed., Wiley, 1962. Chapter 7. P. 227-265. arXiv:gr-qc/0405109.

[2] *Л.Д. Фаддеев, В.Н. Попов.* "Ковариантное квантование гравитационного поля", Успехи физических наук, т. 111, с. 427-450, 1973.

[3] *Л.Д. Фаддеев.* "Проблема энергии в эйнштейновской теории гравитации", Успехи физических наук, т. 136, с. 435-457, 1982.

[4] *В.А. Фок.* "Теория пространства, времени, тяготения", М.:УРСС, 2007.

[5] *Б. Девитт.* "Динамическая теория групп и полей", М.:Наука, 1987.

[6] *Н.П. Коноплева, В.Н. Попов.* "Калибровочные поля", М.:УРСС, 2000.

[7] *М. Грин, Дж. Шварц, Е. Виттен.* "Теория суперсимметрии", в 2х томах, М.:Мир, 1990.

[8] *A. Ashtekar, M. Bojowald, J. Lewandowski.* "Mathematical structure of loop quantum cosmology", Adv. Theor. Math. Phys. V. 7, p. 233-268, 2003, arXiv:gr-qc/0304074v4.

Содержание