ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 131, № 1
апрель, 2002

© 2002 г. С. А. Пастон*, Е. В. Прохватилов†, В. А. Франке*

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОМУ ПОДХОДУ

Построен гамильтониан на световом фронте, воспроизводящий результаты двумерной квантовой электродинамики в лоренцевых координатах. Для этого использованы процедура бозонизации и анализ бозонной теории возмущений во всех порядках по массе фермиона. Кроме обычных членов, возникающих при наивном квантовании на световом фронте, полученный гамильтониан содержит дополнительный контрчлен. Он пропорционален линейной комбинации фермионных нулевых мод (умноженных на некоторый фактор, компенсирующий заряд и фермионное число). Коэффициент перед этим контрчленом не имеет ультрафиолетовой расходимости, зависит от значения фермионного конденсата в θ-вакууме и при малой массе фермиона линеен по ней.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гамильтонов подход к квантовой теории поля в координатах светового фронта (СФ) $x^{\pm} = (x^0 \pm x^3)/\sqrt{2}$, $x^{\perp} = (x^1, x^2)$, где x^+ играет роль времени [1], является одним из непертурбативных подходов к решению проблемы сильного взаимодействия [2], [3]. В рамках этого подхода квантование производится на плоскости $x^+ = 0$, а генератор P_+ сдвига вдоль оси x^+ служит гамильтонианом. Генератор P_- сдвига вдоль оси x^- не смещает поверхности квантования и поэтому является кинематическим (по терминологии Дирака), в отличие от динамического генератора P_+. В результате оператор импульса P_- оказывается квадратичным по полям и не зависит от взаимодействия. С другой стороны, этот оператор неотрицателен, а нулевое собственное значение имеет только на физическом вакууме. Это приводит к тому, что фурье-моды полей, соответствующие положительным и отрицательным значениям p_-, играют роль операторов рождения и уничтожения над физическим вакуумом и могут быть использованы для построения

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
†НИИ физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

пространства Фока. Таким образом, в координатах СФ физический вакуум совпадает с "математическим". Спектр связанных состояний можно искать, решая уравнение Шредингера

$$P_+|\Psi\rangle = p_+|\Psi\rangle \tag{1}$$

в подпространстве с фиксированными p_-, $p_\perp$. Тогда для массы m получим выражение $m^2 = 2p_+p_- - p_\perp^2$.

Такой поиск связанных состояний можно проводить вне рамок теории возмущений (ТВ), например с помощью так называемого *метода дискретизованного квантования на СФ* (метод DLCQ) [2], [4].

Однако гамильтонов формализм на СФ содержит специфическую расходимость при $p_- = 0$ [2], [3] и требует ее регуляризации. Простейшей такой регуляризацией (назовем ее *светоподобной*) является простое обрезание $|p_-| \geqslant \varepsilon > 0$, нарушающее лоренцеву и калибровочную инвариантности. Можно использовать другую регуляризацию, сохраняющую калибровочную инвариантность, – обрезание $|x^-| \leqslant L$ с введением периодических граничных условий (она применяется в методе DLCQ). Тогда импульс p_- становится дискретным ($p_- = p_n = \pi n/L$, n – целое число) и явно отделяется нулевая мода поля, соответствующая $n = 0$. В принципе канонический формализм позволяет выразить эту нулевую моду через другие с помощью решения уравнений связей, но обычно это является сложной задачей [5].

Введение светоподобной регуляризации может породить неэквивалентность между теорией в координатах СФ и обычной лоренц-ковариантной теорией. Действительно, опыт непертурбативных вычислений на основе гамильтонова формализма на СФ показывает, что результат вычисления может отличаться от соответствующего результата, полученного в лоренцевых координатах [6]–[8]. Более того, такие отличия были обнаружены даже в низших порядках ТВ [9]. В результате возникает задача "исправления" канонического гамильтониана на СФ (являющегося результатом наивного квантования в координатах СФ), т.е. задача поиска контрчленов к нему, компенсирующих указанные различия. Если эту задачу удается решить во всех порядках ТВ, то полученный исправленный гамильтониан на СФ можно использовать для проведения непертурбативных расчетов.

ТВ, порождаемая гамильтонианом на СФ, может быть представлена как фейнмановская ТВ с теми же диаграммами, но с обрезанием $|p_-| \geqslant \varepsilon > 0$ и со специальным правилом интегрирования, которое мы называем *светоподобным* расчетом: сначала интегрирование по p_+, а затем по остальным компонентам импульсов [10]. Поэтому для нахождения упомянутых различий в рамках ТВ достаточно сравнить светоподобный и обычный (лоренцев) способы расчета диаграмм (далее термины *светоподобные* или *лоренцевы* в применении к диаграммам и функциям Грина означают, что они получены с помощью светоподобного или лоренцева расчета).

Для некалибровочных теорий поля типа модели Юкавы удается найти необходимые для исправления канонического гамильтониана на СФ контрчлены [9], [11], в том числе во всех порядках ТВ по константе связи [12]. Но для калибровочной теории при использовании простейшей ультрафиолетовой (УФ) регуляризации непосредственное применение метода, описанного в статье [12], приводит к необходимости добавления к каноническому гамильтониану на СФ бесконечного числа контрчленов.

Указанную трудность удается преодолеть с помощью введения специфической нестандартной регуляризации [13], похожей на регуляризацию Паули–Вилларса, причем калибровочная инвариантность оказывается нарушенной. Это приводит к появлению большого, но конечного числа контрчленов с неизвестными коэффициентами. В результате для квантовой хромодинамики исправленный гамильтониан на СФ содержит десять неопределенных коэффициентов, и только при некоторой неизвестной заранее зависимости этих коэффициентов от параметра регуляризации в пределе снятия регуляризации он воспроизводит во всех порядках ТВ результаты лоренц-ковариантной теории. Наличие неизвестных коэффициентов и сложная структура регуляризации (регуляризованный гамильтониан содержит много дополнительных полей) делают чрезвычайно сложными практические вычисления с полученным гамильтонианом. Кроме того, поскольку анализировалась только ТВ по константе связи, то могли остаться неучтенными чисто непертурбативные эффекты.

В данной работе предлагается другой способ построения гамильтониана на СФ, пригодный для двумерных калибровочных теорий поля (здесь рассматривается двумерная квантовая электродинамика (КЭД-2)). Сначала мы переходим к бозонной формулировке теории, затем, анализируя бозонную ТВ (по массе фермиона), находим исправленный гамильтониан на СФ в бозонных терминах. Далее, уже для теории на СФ, возвращаемся к фермионным переменным. Заметим, что бозонная ТВ принципиально отличается от ТВ по константе связи исходной теории с фермионами (в КЭД-2 последняя вообще не существует из-за инфракрасных расходимостей). Поэтому полученный гамильтониан на СФ может учитывать непертурбативные (по отношению к обычной константе связи) эффекты.

Описанный способ построения гамильтониана на СФ удается применить только к КЭД-2, но информация, полученная при анализе этой двумерной модели, может использоваться при разработке новых, учитывающих непертурбативные вакуумные эффекты, методов построения гамильтониана на СФ для четырехмерных калибровочных теорий. Такие попытки извлечь из анализа КЭД-2 информацию о четырехмерных калибровочных теориях на СФ уже предпринимались в последнее время [14].

2. СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ГАМИЛЬТОНИАНА НА СФ ДЛЯ КЭД-2

В основе предлагаемого способа построения гамильтониана КЭД-2 на СФ лежит возможность перехода от КЭД-2 к эквивалентной ей скалярной теории [15] (типа модели синус-Гордон). Это осуществляется с помощью процедуры бозонизации, т.е. перехода от фермионных переменных к бозонным [8], [16]. После такого перехода массовый член фермионного поля в гамильтониане КЭД-2 становится членом взаимодействия для скалярного поля, а масса фермиона M – константой взаимодействия бозонной теории. При $M=0$ КЭД-2 представляет собой модель Швингера, а бозонная теория оказывается свободной. ТВ для бозонной теории (т.е. ТВ по M) представляет собой киральную ТВ. Нетривиальность квантового вакуума в КЭД-2, связанная с инстантонами (θ-вакуум) [15], [17], в бозонной теории учитывается явно с помощью параметра θ в члене взаимодействия.

Лагранжиан бозонной теории имеет вид

$$L = L_0 + L_I, \tag{2}$$

$$L_0 = \frac{1}{8\pi}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2), \tag{3}$$

$$L_I = \frac{\gamma}{2}e^{i\theta}{:}e^{i\varphi}{:} + \frac{\gamma}{2}e^{-i\theta}{:}e^{-i\varphi}{:}, \qquad \gamma = \frac{Mme^C}{2\pi}, \qquad m = \frac{e_{\mathrm{el}}}{\sqrt{\pi}}, \tag{4}$$

где e_{el} – аналог заряда электрона, $C = 0.577216$ – постоянная Эйлера, а символ нормального упорядочения означает, что в ТВ по γ исключаются диаграммы с закороченными линиями (это соответствует обычному значению символа нормального упорядочения в гамильтониане).

Рассмотрим правила Фейнмана для такой теории в лоренцевых координатах. Имеются вершины двух типов с j внешними линиями ($j = 0, 1, 2, \dots$). Этим вершинам соответствуют множители $i^{j+1}e^{i\theta}\gamma/2$ для первого типа и $i^{-j+1}e^{-i\theta}\gamma/2$ для второго. Вершины без линий ($j=0$) рассматриваются как связные поддиаграммы. Удобно отнести часть вершинных множителей $i^{\pm j}$ к линиям, внешним по отношению к вершине ($\pm i$ на каждую линию). Пропагатор $\Delta(x) = \langle 0|T(\varphi(x)\varphi(0))|0\rangle$, где свободное поле $\varphi(x)$ соответствует разложению лагранжиана (2), имеет вид

$$\Delta(x) = \int d^2k\, e^{ikx}\Delta(k), \qquad \Delta(k) = \frac{i}{\pi}\frac{1}{k^2 - m^2 + i0}, \tag{5}$$

причем $d^2k = dk_0\, dk_1,\ kx = k_0x^0 + k_1x^1$.

Полученная ТВ, с одной стороны, простая, так как это теория скалярного поля, а с другой стороны, сложная, так как содержит неполиномиальное взаимодействие. Поэтому в каждом порядке ТВ имеется бесконечное число диаграмм, причем их сумма может иметь УФ-расходимость, хотя каждая диаграмма конечна [17], [18]. Легко показать, что во втором порядке ТВ по γ (а значит, и по M) сумма всех диаграмм, дающих вклад в невакуумную функцию Грина, оказывается УФ-конечной [18]. Возникает предположение, что так же обстоит дело и в высших порядках ТВ. Действительно, анализируя ТВ в координатном пространстве, удается доказать [19], что сумма всех связных лоренц-ковариантных диаграмм любого порядка n по γ УФ-конечна, причем при $n>2$ расходимость отсутствует даже при фиксированном способе присоединения внешних линий, а при $n=2$ – только после суммирования по всем способам присоединения внешних линий. Остаются УФ-расходящимися только сумма вакуумных диаграмм второго порядка, а также сумма невакуумных диаграмм второго порядка при фиксированном способе присоединения внешних линий. Следует отметить, что указанную УФ-конечность можно доказать только для лоренц-ковариантных функций Грина, но не для светоподобных, поскольку при светоподобном расчете некоторые диаграммы оказываются равными нулю, что разрушает доказательство. УФ-расходимости светоподобных диаграмм автоматически регуляризуются параметром светоподобного обрезания ε. В пределе $\varepsilon \to 0$ такие расходимости возникают и должны компенсироваться контрчленами.

Экспоненциальность взаимодействия рассматриваемой модели позволяет переформулировать ТВ на языке суперпропагаторов, т.е. сумм вкладов, соответствующих вариантам соединения пары вершин разным числом пропагаторов [17], [19]. Для пары вершин разного типа суперпропагатор равен $e^{\Delta(x)}$, а для вершин одного типа он равен $e^{-\Delta(x)}$. При таком подходе сумма всех обычных (в том числе несвязных) диаграмм с данными числом вершин и способом присоединения внешних линий описывается одной диаграммой, в которой каждая пара вершин соединена соответствующим суперпропагатором (под связностью всегда понимается связность в обычном смысле).

Наличие УФ-расходимости для упомянутых выше сумм невакуумных диаграмм второго порядка требует введения промежуточной УФ-регуляризации (она промежуточная, поскольку окончательные значения невакуумных функций Грина УФ-конечны, и перенормировка лоренц-ковариантной теории не требуется). В качестве такой регуляризации можно выбрать, например, регуляризацию Паули–Вилларса. На этом пути был построен бозонный гамильтониан на СФ [18] (для не содержащей УФ-расходимостей модели синус-Гордон аналогичное рассмотрение было проведено в работе [20]). Этот гамильтониан содержит контрчлен с коэффициентом, пропорциональным киральному конденсату и расходящимся в пределе снятия регуляризации Паули–Вилларса. Поэтому нужно до самого конца сохранять эту регуляризацию. Поскольку гамильтониан остается регуляризованным по Паули–Вилларсу, то оказывается невозможно перейти обратно к фермионным переменным и получить гамильтониан на СФ в фермионных терминах, присущих исходной калибровочной теории. Поэтому здесь мы будем использовать специальную УФ-регуляризацию лоренц-ковариантного пропагатора бозонного поля φ:

$$\Delta_{\rm reg}(x) = \begin{cases} \Delta_\varepsilon^{\rm lf}(x), & \{|x^-| \leqslant \alpha\} \cap \{|x^+| \leqslant \alpha\}, \\ \Delta(x), & \{|x^-| > \alpha\} \cup \{|x^+| > \alpha\}, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\Delta_\varepsilon^{\rm lf}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{|k_-| \geqslant \varepsilon} dk_- \int_{-\infty}^{+\infty} dk_+ \, \frac{e^{i(k_+x^+ + k_-x^-)}}{2k_+k_- - m^2 + i0} \tag{7}$$

– светоподобный пропагатор, а α является параметром УФ-регуляризации. Эта регуляризация обладает замечательным свойством: после перехода к координатам СФ она не вносит дополнительных модификаций в теорию, кроме уже имеющегося обрезания $|p_-| \geqslant \varepsilon > 0$, и позволяет совершить обратный переход к фермионным переменным.

К сожалению, при использовании регуляризации (6) пропагатор лоренцевой ТВ существенно зависит от параметра ε, поскольку предел $\varepsilon \to 0$ отвечает снятию регуляризации. Вследствие этого прямое сравнение в импульсном пространстве светоподобной и лоренцевой ТВ с использованием метода из работы [12] становится невозможным, так как из-за сложности выражения для суперпропагатора в импульсном пространстве не удается выделить полную зависимость от ε разности результатов вычисления диаграмм в лоренцевых координатах и в координатах СФ. Поэтому приходится проводить анализ в координатном пространстве.

При использовании метода, описанного в работе [12], учитывается вклад области $p_- \approx \varepsilon$, $p_+ \approx 1/\varepsilon$, что в координатном пространстве соответствует области больших $x^- \approx 1/\varepsilon$. Анализ сходимости в этой области экспоненциальных рядов разложения суперпропагаторов позволяет заключить, что ряды можно оборвать, т.е. что можно перейти к "частичным" суперпропагаторам

$$D^m_{\pm}(x) = \sum_{m'=0}^{m} \frac{1}{m'!}(\pm\Delta(x))^{m'}, \qquad e^{\pm\Delta(x)} = \lim_{m\to\infty} D^m_{\pm}(x). \tag{8}$$

После этого можно использовать результаты, полученные методом статьи [12]. Такое рассуждение будет проведено в разделе 4, но сначала нужно найти различия между светоподобным и лоренцевым суперпропагаторами при конечных x^- в пределе $\varepsilon \to 0$. Обычно таких различий между пропагаторами не возникает, но в рассматриваемой модели в терминах суперпропагаторов такой вклад есть из-за "плохого" УФ-поведения теории. Именно такой вклад должен быть прежде всего найден и скомпенсирован контрчленом к гамильтониану на СФ.

3. КОМПЕНСАЦИЯ РАЗЛИЧИЙ МЕЖДУ СВЕТОПОДОБНЫМ И ЛОРЕНЦЕВЫМ СУПЕРПРОПАГАТОРАМИ ПРИ КОНЕЧНЫХ x^-

Светоподобный пропагатор, полностью регуляризованный условием $\varepsilon \leqslant |k_-| \leqslant V$, можно записать в виде [19]

$$\Delta^{\mathrm{lf}}_{\varepsilon,V}(x) = \int_{\varepsilon}^{V} \frac{dk}{k}\, e^{-i\left(kx^- + \frac{m^2}{2k}x^+\right)\,\mathrm{sign}\,x^+} \tag{9}$$

(при этом исходным является выражение (7) с дополнительным обрезанием $|k_-| \leqslant V$). С другой стороны, вводя в лоренцевых координатах обрезание импульса $|k_1| \leqslant \Lambda$, лоренцев пропагатор можно привести к похожему виду:

$$\Delta_{\Lambda}(x) = \int_{\varepsilon_\Lambda}^{V_\Lambda} \frac{dk}{k}\, e^{-i\left(kx^- + \frac{m^2}{2k}x^+\right)\,\mathrm{sign}\,x^0}, \tag{10}$$

где $\varepsilon_\Lambda \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $V_\Lambda \underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ [19]. При $x^2 \neq 0$ в выражениях (9) и (10) регуляризацию можно снять, после чего они совпадут (нужно учесть, что после снятия регуляризации знак в показателе экспоненты оказывается несущественным), а значит, совпадут и соответствующие суперпропагаторы. При $x^2 \approx 0,\ x^\mu \neq 0$ в пределе снятия регуляризации лоренцев пропагатор ведет себя как

$$\Delta(x) \sim -\ln\biggl(-\frac{m^2 e^{2C}}{4}(x^2 - i0)\biggr). \tag{11}$$

Отсюда получаем поведение лоренцева суперпропагатора, соединяющего вершины разных типов, в пределе снятия регуляризации при указанных x:

$$e^{\Delta(x)} \sim -\frac{4e^{-2C}}{m^2}\frac{1}{x^2 - i0}. \tag{12}$$

Поведение лоренцева суперпропагатора $e^{-\Delta(x)}$, соединяющего вершины одного типа, будет описываться правой частью (12) в степени -1.

Поведение светоподобных суперпропагаторов при $x^- \approx 0,\ x^+ \neq 0$ совпадает с поведением лоренцева суперпропагатора, поскольку в этой области формулы (9) и (10) совпадают. При $x^+ \approx 0,\ x^- \neq 0$ поведение $e^{-\Delta^{\rm lf}(x)}$ по непрерывности такое же, как и $e^{-\Delta(x)}$, а $e^{\Delta^{\rm lf}(x)}$ ведет себя, как обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x^+}$ в смысле главного значения (это можно показать, оценив интеграл от $e^{\Delta^{\rm lf}(x)}$ по малой области вокруг точки $x^+ = 0$ [19]):

$$e^{\Delta^{\rm lf}(x)} \sim -\frac{4e^{-2C}}{m^2}\biggl(\mathcal{P}\frac{1}{x^+}\biggr)\frac{1}{2x^- - i0\cdot \operatorname{sign} x^+}. \tag{13}$$

Суммируя все вышесказанное, получаем

$$e^{-\Delta(x)} = e^{-\Delta^{\rm lf}(x)}, \tag{14}$$

$$e^{\Delta(x)} - e^{\Delta^{\rm lf}(x)} = -\frac{2\pi i e^{-2C}}{m^2|x^-|}\delta(x^+), \tag{15}$$

причем эти равенства верны в смысле обобщенных функций, действующих на классе основных функций, равных нулю при $x^\mu = 0$ и имеющих носитель, ограниченный по x^-. Если заменить предельные значения светоподобных суперпропагаторов $e^{\pm\Delta^{\rm lf}(x)}$ на регуляризованные $e^{\pm\Delta^{\rm lf}_\varepsilon(x)}$, то равенства (14), (15) останутся верными в пределе $\varepsilon \to 0$, если упомянутый носитель имеет по x^- размер W такой, что $W\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Теперь нужно добавить к гамильтониану на СФ контрчлен, обеспечивающий исправление светоподобного суперпропагатора $e^{\Delta^{\rm lf}_\varepsilon(x)}$ по формуле (15). В качестве соответствующего контрчлена к действию можно выбрать выражение

$$S_{\rm c} = \frac{\pi e^{-2C}}{2}\frac{\gamma^2}{m^2}\int d^2x\, d^2y\, \bigl(:\!e^{i\varphi(x)}e^{-i\varphi(y)}\!: -1\bigr)\delta(x^+ - y^+)\times$$
$$\times\,\theta(|x^- - y^-| - \alpha)\frac{v(\varepsilon(x^- - y^-))}{|x^- - y^-|}, \tag{16}$$

куда включена произвольная непрерывная быстро убывающая функция $v(z)$, удовлетворяющая условиям $v(0) = 1,\ v^*(z) = v(-z)$, и где с помощью параметра α (который впервые был введен в формуле (6)) “вырезана” УФ-особенность.

Можно показать [19], что такая добавка к действию эквивалентна (с точностью до поправок порядка ε) добавлению величины

$$-\frac{2\pi i}{m^2}e^{-2C}\delta(x^+)\frac{\theta(|x^-|-\alpha)}{|x^-|}v(\varepsilon x^-) \tag{17}$$

к каждому светоподобному суперпропагатору $e^{\Delta_\varepsilon^{\rm lf}(x)}$. Эта величина совпадает с правой частью (15) при действии на функции из описанного после формулы (15) класса в пределе $\varepsilon, \alpha \to 0$. Указанная эквивалентность доказывается с помощью преобразования выражения для произвольной функции Грина через суперпропагаторы. При этом существенна следующая из (9) оценка $e^{-\Delta_\varepsilon^{\rm lf}(x)}|_{x^+=0} = O(\varepsilon)$.

Отметим, что наличие δ-функции по x^+ в равенстве (15) и, следовательно, в формуле (16) обеспечивает локальность действия по времени x^+ и позволяет перейти от контрчлена (16) в действии к контрчлену в гамильтониане на СФ.

4. АНАЛИЗ СВЕТОПОДОБНОЙ И ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОЙ ТЕОРИЙ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим светоподобную ТВ для функций Грина без вакуумных петель, порождаемую действием

$$\begin{aligned} S = \int d^2x \left(\frac{1}{8\pi}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2) + B{:}e^{i\varphi}{:} + B^*{:}e^{-i\varphi}{:}\right) + \frac{2\pi}{m^2}e^{-2C}|B|^2 \times \\ \times \int d^2x\, d^2y\, \left({:}e^{i\varphi(x)}e^{-i\varphi(y)}{:} - 1\right)\delta(x^+ - y^+)\theta(|x^- - y^-| - \alpha)\frac{v(\varepsilon(x^- - y^-))}{|x^- - y^-|}. \end{aligned} \tag{18}$$

Это действие отличается от действия, соответствующего лагранжиану (2), заменой константы взаимодействия $(\gamma/2)e^{i\theta}$ на комплексный параметр B и добавлением контрчлена, описанного в предыдущем разделе (с коэффициентом, связанным с B так же, как коэффициент в (16) с $(\gamma/2)e^{i\theta}$).

Докажем, что порождаемая действием (18) светоподобная ТВ в пределе $\varepsilon, \alpha \to 0$ во всех порядках эквивалентна лоренц-ковариантной. При этом величина B зависит от m, $\gamma, \theta, \alpha, \varepsilon$ и представляет собой ряд:

$$B = \frac{\gamma}{2}e^{i\theta} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k\gamma^k. \tag{19}$$

При анализе ТВ удобно перейти от ее формулировки в терминах суперпропагаторов $e^{\pm\Delta(x)}$ к “неполным” суперпропагаторам $\left(e^{\pm\Delta(x)} - 1\right)$. В новых терминах каждая пара точек может соединяться или не соединяться соответствующим неполным суперпропагатором, причем рассматриваются только связные диаграммы. Тем самым исключаются вакуумные поддиаграммы, которые учитывались бы при использовании полных суперпропагаторов $e^{\pm\Delta(x)}$.

В обычной светоподобной ТВ существует класс диаграмм, всегда равных нулю, – это диаграммы, все внешние линии которых присоединены к одной вершине. Будем называть эти диаграммы "обобщенный головастик" (или ОГ-диаграммы). В рассматриваемой теории ненулевые ОГ-диаграммы с некоторой точки зрения существуют: в соответствии с изложенным в разделе 3 наличие последнего слагаемого в действии (18) можно заменить добавлением к каждому суперпропагатору $(e^{\Delta_\varepsilon^{\rm lf}(x)}-1)$ величины (17), после чего ОГ-диаграмма может стать ненулевой. Можно показать [19], что ненулевой становится только ОГ-диаграмма второго порядка с разными типами вершин, которая есть просто произведение двух вершинных множителей на суперпропагатор. В ее значение дает вклад только добавка (17), и он равен $i|B|^2w$, где

$$w=\frac{2\pi e^{-2C}}{m^2}\int dx^-\,\frac{\theta(|x^-|-\varepsilon\alpha)}{|x^-|}v(x^-). \tag{20}$$

Эта ОГ-диаграмма может присоединяться или не присоединяться к каждой вершине. Поэтому ее учет можно заменить переопределением вершинных множителей: вместо B и B^* считать вершинными множителями суммы $(B+|B|^2w)$ и $(B^*+|B|^2w)$. Таким образом, порождаемая действием (18) светоподобная ТВ имеет вид набора диаграмм, состоящих из неполных светоподобных суперпропагаторов с добавкой (для случая вершин разных типов) величины (17), причем эти диаграммы не содержат ОГ-поддиаграмм и имеют вершинные множители $(B+|B|^2w)$ и $(B^*+|B|^2w)$.

В лоренц-ковариантной ТВ (порождаемой лагранжианом (2) с учетом промежуточной УФ-регуляризации (6)) ОГ-диаграммы во всех порядках не равны нулю. Но тем не менее, рассуждая аналогичным образом, можно заменить их учет переопределением вершинных множителей: вместо $(\gamma/2)e^{i\theta}$ и $(\gamma/2)e^{-i\theta}$ считать вершинными множителями величины A и A^*, где A – это вычисленная в лоренцевых координатах сумма (во всех порядках по γ, включая первый)

$$A=\frac{\gamma}{2}e^{i\theta}+\sum_{k=2}^{\infty}A_k\gamma^k \tag{21}$$

всех ОГ-диаграмм с внешними линиями, присоединенными к вершине $(\gamma/2)e^{i\theta}$. Используя результаты упомянутого в разделе 2 доказательства УФ-конечности, можно заключить, что при $k>2$ величины A_k конечны, а величина A_2 расходится при $\varepsilon\to 0$ или $\alpha\to 0$ (поскольку это сумма диаграмм второго порядка с фиксированным способом присоединения внешних линий), причем оказывается, что расходящаяся часть выделяется следующим образом [19]:

$$A_2=\frac{\gamma^2}{4}w+\mathrm{const}. \tag{22}$$

Таким образом, регуляризованная по формуле (6) лоренц-ковариантная ТВ будет представлять собой набор диаграмм, состоящих из неполных лоренцевых суперпропагаторов, причем эти диаграммы не содержат ОГ-поддиаграмм и имеют вершинные множители A и A^*.

В полученном виде светоподобную и лоренцеву ТВ удобно сравнивать. Прежде всего, потребуем равенства их вершинных множителей:

$$B + |B|^2 w = A. \tag{23}$$

Далее, как показано в разделе 3, составляющие светоподобную ТВ неполные светоподобные суперпропагаторы с добавлением (для случая вершин разных типов) величины (17) в пределе $\varepsilon \to 0$ совпадают с составляющими лоренцеву ТВ неполными лоренцевыми суперпропагаторами в области конечных (в пределе $\varepsilon \to 0$) x^-. Причем это верно и при $|x^-| \leqslant \alpha$ вследствие регуляризации (6). Поэтому разница между светоподобной и лоренцевой ТВ может возникнуть только за счет отличий в области больших $x^- \sim 1/\varepsilon$. Как видно из формулы (9), для таких (и бо́льших) x^- светоподобный пропагатор остается конечным при любых x^+ и ε, а значит, ряд (8) для светоподобного суперпропагатора можно оборвать, и остаток ряда будет мал равномерно по x^+ и ε. Можно также показать, что вклад добавок (17) в области больших x^- оказывается несущественным. Для лоренцева суперпропагатора его аналитическое поведение (11) позволяет отвести контур интегрирования по x^+ от особенности $x^+ = 0$, а значит, можно снова оборвать ряд, и остаток ряда будет мал равномерно по x^+ (а от ε зависимости нет). Это означает, что вклад в разницу между светоподобными и лоренцевыми диаграммами от области больших x^- не меняется, если перейти к “частичным” суперпропагаторам (8). Последнее эквивалентно переходу к конечным суммам диаграмм в терминах обычных пропагаторов. К таким диаграммам можно применить метод работы [12] сравнения светоподобного и лоренцева способов вычисления диаграмм. Для скалярной теории этот метод показывает, что отличия есть только для ОГ-диаграмм [19]. Но в рассматриваемой форме ТВ таких поддиаграмм нет (см. пояснения после формул (20) и (22)).

Таким образом, получаем, что если параметр B удовлетворяет условию (23), то порождаемая действием (18) светоподобная ТВ в пределе $\varepsilon, \alpha \to 0$ во всех порядках эквивалентна лоренц-ковариантной ТВ. А значит, соответствующий этому действию гамильтониан на СФ

$$\begin{aligned} H = \int dx^- \left(\frac{1}{8\pi} m^2 {:}\varphi^2{:} - B {:}e^{i\varphi}{:} - B^* {:}e^{-i\varphi}{:} \right) - 2\pi e^{-2C} \frac{|B|^2}{m^2} \times \\ \times \int dx^- \, dy^- \left({:}e^{i\varphi(x^-)} e^{-i\varphi(y^-)}{:} - 1 \right) \theta(|x^- - y^-| - \alpha) \frac{v(\varepsilon(x^- - y^-))}{|x^- - y^-|} \end{aligned} \tag{24}$$

определяет теорию, в пределе снятия регуляризации пертурбативно эквивалентную лоренц-ковариантной КЭД-2.

5. СНЯТИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ УФ-РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ВОЗВРАТ К ФЕРМИОННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Найдем параметр B из уравнения (23):

$$B = -\frac{1}{2w} + \sqrt{\frac{1}{4w^2} + \frac{A'}{w} - A''^2} + iA''. \tag{25}$$

Здесь A' и A'' – вещественная и мнимая части величины A, а знак перед корнем выбран в соответствии с низшим порядком разложений (19) и (21). Как видно из формулы (20), величина w является функцией произведения $\varepsilon\alpha$ и при $\varepsilon\alpha \to 0$ расходится как $\ln \varepsilon\alpha$.

Гамильтониан (24) и уравнение (23) были получены в результате анализа ТВ по γ при фиксированном параметре регуляризации α. Поэтому снятие регуляризации $\alpha \to 0$ невозможно в рамках ТВ. Но поскольку анализ был проведен во всех порядках ТВ, далее мы предполагаем выйти за рамки ТВ, применяя полученный гамильтониан для непертурбативных расчетов. В этом случае мы можем осуществить снятие промежуточной УФ-регуляризации $\alpha \to 0$, а значит, $w \to \infty$. Тогда в силу известной информации о расходимости величины A (см. формулу (22) и текст перед ней) выражение (25) можно переписать в виде

$$B = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - A''^2} + iA'' = \frac{\gamma}{2} e^{i\hat{\theta}}, \qquad \sin\hat{\theta} = \frac{2A''}{\gamma}. \tag{26}$$

Интересно отметить, что по модулю константа взаимодействия оказалась такой же, как в исходной лоренц-ковариантной теории (напомним, что комплексный параметр B играет в светоподобной теории ту же роль, что величина $(\gamma/2)e^{i\theta}$ – в лоренц-ковариантной). При больших γ под корнем в выражении (26) может оказаться отрицательное число. Это означает, что уравнение (23) не имеет решения, а значит, при таких γ предложенная схема построения гамильтониана на СФ неприменима.

Заметим также, что из-за специальной структуры контрчлена равенство нулю параметра α в гамильтониане (24) не приводит к появлению расходимостей в матричных элементах.

Скалярную теорию, заданную гамильтонианом на СФ (24), можно переписать в виде некоторой фермионной теории на СФ, используя обратную процедуру бозонизации [19]. При этом вместо регуляризации $|p_-| \geqslant \varepsilon$ вводится обрезание $|x^-| \leqslant L$ с периодическими граничными условиями (как в упомянутом в разделе 1 методе DLCQ) и исключается из рассмотрения нулевая мода по x^-. В результате роль параметра ε начинает играть шаг π/L дискретного импульса p_-. Для проведения обратной процедуры бозонизации удобно в последнем слагаемом гамильтониана (24) изменить нормальное упорядочение экспонент по формуле

$$:e^{i\varphi(x^-)} e^{-i\varphi(y^-)}: = :e^{i\varphi(x^-)}: :e^{-i\varphi(y^-)}: \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-i\frac{\pi}{L} n(x^- - y^-)}\right) \tag{27}$$

и выбрать функцию $v(z)$ в виде

$$v(z) = |z| \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-i\pi mz} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{2}} e^{i\pi nz} \tag{28}$$

(напомним, что в ее определении есть произвол, см. пояснения после формулы (16)). Тогда, используя формулу обратной бозонизации [16], [8]

$$\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{-i\omega} e^{-i\frac{\pi}{L}x^- Q} e^{i\frac{\pi}{2L}x^-} {:}e^{-i\varphi(x)}{:}, \tag{29}$$

гамильтониан на СФ (24), задающий теорию, в пределе снятия регуляризации пертурбативно эквивалентную лоренц-ковариантной КЭД-2, можно записать в фермионных переменных [19]:

$$H = \int_{-L}^{L} dx^- \left(\frac{e_{\rm el}^2}{2} \left(\partial_-^{-1} [\psi_+^+ \psi_+]\right)^2 - \frac{M}{2} (R e^{i\omega} d_0^+ + \text{э.с.}) - \frac{iM^2}{2} \psi_+^+ \partial_-^{-1} \psi_+ \right), \tag{30}$$

где

$$R = \frac{e_{\rm el}\, e^C}{2\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-i\hat{\theta}\left(\frac{M}{e_{\rm el}}, \theta\right)}. \tag{31}$$

Поле ψ_+ подчинено антипериодическим граничным условиям по x^- и разлагается по операторам рождения и уничтожения следующим образом:

$$\begin{gathered} \psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \left(\sum_{n \geqslant 1} b_n e^{-i\frac{\pi}{L}(n-\frac{1}{2})x^-} + \sum_{n \geqslant 0} d_n^+ e^{i\frac{\pi}{L}(n+\frac{1}{2})x^-} \right), \\ \{b_n, b_{n'}^+\} = \{d_n, d_{n'}^+\} = \delta_{nn'}, \qquad b_n|0\rangle = d_n|0\rangle = 0. \end{gathered} \tag{32}$$

В выражении (29) величина Q является оператором заряда, определяющим физическое подпространство векторов $|\text{phys}\rangle$:

$$Q = \sum_{n \geqslant 1} b_n^+ b_n - \sum_{n \geqslant 0} d_n^+ d_n, \qquad Q|\text{phys}\rangle = 0. \tag{33}$$

В выражении (30) оператор ω есть канонически-сопряженная заряду Q величина, обладающая свойствами [16], [8]

$$e^{i\omega} \psi_+(x) e^{-i\omega} = e^{i\frac{\pi}{L}x^-} \psi_+(x), \qquad e^{i\omega}|0\rangle = b_1^+|0\rangle, \quad e^{-i\omega}|0\rangle = d_0^+|0\rangle, \tag{34}$$

которые полностью ее определяют, а квадратные скобки означают отбрасывание нулевой моды по x^-. Оператор светоподобного импульса P_- имеет вид

$$P_- = \sum_{n \geqslant 1} b_n^+ b_n \frac{\pi}{L} \left(n - \frac{1}{2}\right) + \sum_{n \geqslant 0} d_n^+ d_n \frac{\pi}{L} \left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{35}$$

Интересно отметить, что присутствующий в окончательном гамильтониане на СФ (30) коэффициент R и определяющий его параметр $\hat{\theta}$ связаны со значениями вакуумных конденсатов в лоренцевых координатах [19]:

$$\operatorname{Im} R = \langle\Omega|{:}\bar{\Psi}\gamma^5\Psi{:}|\Omega\rangle, \qquad |R| = \frac{e_{\mathrm{el}}\, e^C}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \tag{36}$$

(последнее равенство следует из (31)) и

$$\sin\hat{\theta} = \langle\Omega|{:}\sin(\varphi+\theta){:}|\Omega\rangle. \tag{37}$$

Здесь $|\Omega\rangle$ – физический вакуум, а нормальное упорядочение проводится в лоренцевых координатах.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя процедуру бозонизации и анализ ТВ во всех порядках по массе фермиона M, мы получили гамильтониан на СФ (30), задающий фермионную теорию, в непрерывном пределе $L \to \infty$ пертурбативно эквивалентную лоренц-ковариантной КЭД-2. Этот гамильтониан содержит все члены, возникающие при наивном каноническом квантовании в координатах СФ, причем один из них (третье слагаемое в (30)) отсутствует при квантовании в лоренцевых координатах и появляется как один из контрчленов, восстанавливающих эквивалентность светоподобной и лоренцевой ТВ. Кроме того, полученный гамильтониан содержит еще один контрчлен (второе слагаемое в (30)), пропорциональный нулевым модам фермионных полей, умноженным на фазовый оператор $e^{i\omega}$, нейтрализующий их заряд и фермионное число. Коэффициент перед этим контрчленом конечен, определяется величиной фермионного вакуумного конденсата (36) и при малой массе фермиона линеен по ней. При некотором соотношении между значением конденсата и величиной заряда e_{el} уравнения (36), определяющие указанный коэффициент, могут оказаться несовместными, что означает неприменимость в этом случае описанной схемы построения гамильтониана на СФ. Однако если конденсат и принимает такие значения, то только при достаточно больших массах фермиона.

Полученный гамильтониан на СФ может быть применен для проведения непертурбативных расчетов методом DLCQ.

Мы надеемся, что информация, полученная при анализе данной двумерной модели, поможет в разработке методов построения гамильтониана на СФ, учитывающих непертурбативные вакуумные эффекты и применимых к четырехмерным калибровочным теориям поля.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, грант № Е00-3.3-316. Часть этой работы была выполнена во время пребывания Е.П. в университете Эрлангена и поддержана грантом DFG 436 RUS 113/324/0(R). Е.П. благодарит Ф. Ленца, М. Тиса и Б. ван де Санде за полезные обсуждения и помощь. Эта работа также частично поддержана Грибовской стипендией “World Federation of Scientists”.

Список литературы

[1] *P. A. M. Dirac*. Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392.
[2] *S. J. Brodsky, H.-C. Pauli, S. S. Pinsky*. Phys. Rep. 1998. V. 301. P. 299; hep-ph/9705477.
[3] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov*. Quantum field theory in light-front coordinates. In: Quantum Theory in Honour of Vladimir A. Fock. Pt. 1. St.-Petersburg: Unesco, St.-Petersburg Univ. Press, Euro-Asian Physical Society, 1998. P. 38; hep-th/9901029.
[4] *А. М. Анненкова, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке*. Вестн. ЛГУ. 1985. № 4. С. 80.
[5] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov*. Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 239; P. 437.
[6] *А. М. Анненкова, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке*. ЯФ. 1993. Т. 56. № 6. С. 179.
[7] *Е. В. Прохватилов, В. А. Франке*. ЯФ. 1989. Т. 49. № 4. С. 1109.
[8] *E. V. Prokhvatilov, H. W. L. Naus, H.-J. Pirner*. Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2933; hep-th/9406275.
[9] *M. Burkardt, A. Langnau*. Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1187; P. 3857.
[10] *W.-M. Zhang, A. Harindranath*. Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 4868; P. 4881; P. 4903.
[11] *Е. В. Прохватилов, В. А. Франке*. ЯФ. 1996. Т. 59. № 11. С. 2105.
[12] *С. А. Пастон, В. А. Франке*. ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 399; hep-th/9901110.
[13] *С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке*. ТМФ. 1999. Т. 120. № 3. С. 417; hep-th/0002062.
[14] *G. McCartor*. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 105004.
[15] *S. Coleman*. Ann. Phys. 1976. V. 101. P. 239.
[16] *Е. В. Прохватилов*. ТМФ. 1991. Т. 88. № 1. С. 17.
[17] *C. Adam*. Ann. Phys. 1997. V. 259. P. 1; hep-th/9704064.
[18] *S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke*. QED-2 light-front Hamiltonian reproducing all orders of covariant chiral perturbation theory. hep-th/9910114.
[19] *S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke*. On the construction of corrected light-front Hamiltonian for QED-2. hep-th/0011224.
[20] *M. Burkardt*. Phys. Rev. D. 1993. V. 47. P. 4628.