С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке

УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ КОНЕЧНОСТЬ КИРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КЭД-2

Рассматривается теория возмущений по массе фермиона ("киральная" теория возмущений) для двумерной квантовой электродинамики. С этой целью теория переписывается в эквивалентной бозонной форме, в которой взаимодействие имеет экспоненциальный вид, а масса фермиона оказывается константой связи. Бозонная теория возмущений переформулируется на языке "суперпропагаторов", после чего анализируется ее ультрафиолетовое поведение. Показано, что бозонные функции Грина без вакуумных петель остаются конечными во всех порядках теории возмущений по массе фермиона.

1. ВВЕДЕНИЕ

В связи с известными трудностями, возникающими при анализе калибровочных теорий, представляет интерес изучение простейших моделей, допускающих непертурбативный подход, и, в частности, позволяющих исследовать поведение бесконечных рядов теории возмущений во всех порядках. Одной из таких моделей является двумерная квантовая электродинамика (КЭД-2) с ненулевой массой фермиона.

Эта модель, называемая также массивной моделью Швингера, описывается плотностью лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - M)\Psi, \tag{1}$$

где $\mu,\nu = 0,1$, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ie_{\mathrm{el}}A_{\mu}$, A_{μ} – вектор-потенциал электромагнитного поля, $\Psi = \binom{\psi_-}{\psi_+}$, $\bar{\Psi} = \Psi^{+}\gamma^{0}$ – фермионное поле с массой M, e_{el} – аналог заряда электрона, матрицы γ^{μ} можно выбрать в виде

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Как известно, при нулевой массе фермиона M рассматриваемая модель точно решаема [1]. Поэтому для случая $M \neq 0$ имеет смысл рассматривать так называемую "киральную" теорию возмущений (т. в.), то есть т. в. по массе фермиона M [2]. Это представляет интерес, так как такая т. в. соответствует непертурбативному подходу с точки зрения обычной т. в. Действительно, реальное разложение идет по безразмерному отношению M/e_{el} (константа связи e_{el} в двумерии имеет размерность массы). Поэтому киральную т. в. можно рассматривать как разложение по $1/e_{\mathrm{el}}$, которое применимо в области больших e_{el}.

В калибровочных теориях с числом измерений больше двух обращение в ноль массы фермиона не делает модель точно решаемой. Поэтому не удается развить т. в. по M. Несмотря на это, и в таких теориях можно пытаться рассматривать разложение по $1/e_{\mathrm{el}}$ с помощью перехода к "дуальной" форме модели. Киральная т. в. для КЭД-2 может служить простым примером такого разложения, на котором можно изучать его особенности.

Еще одной областью применения киральной т. в. для КЭД-2 является построение гамильтониана на световом фронте (с. ф.) для этой модели и изучение свойств такого подхода на данном примере. Гамильтонов подход на с. ф. [3] является полностью непертурбативным (т. е. соответствующее уравнение Шредингера можно решать при любых значениях константы связи) и, в то же время, описание физического вакуумного состояния в таком подходе оказывается тривиальным [4]. Однако, из-за нарушения лоренц-инвариантности и наличия требующих регуляризации специфических для координат с. ф. особенностей при нулевом значении светоподобной компоненты импульса $p_- = (p_0 - p_3)/\sqrt{2}$ [5–7] теория, порождаемая гамильтонианом на с. ф., может быть неэквивалентна исходной лоренц-ковариантной теории [8, 9]. В этом случае для восстановления эквивалентности необходимо добавить к гамильтониану на с. ф. соответствующие контрчлены. Вид этих контрчленов можно искать методом приближенного предельного перехода к с. ф. [9–11], а также сравнивая вклады всех порядков т. в. по константе связи для теории, порожденной гамильтонианом на с. ф., и для лоренц-ковариантной теории [12–14]. Однако, этот способ не применим к КЭД-2, так как т. в. по константе связи $e_{\rm el}$ в этой модели не существует из-за инфракрасных расходимостей. Тем не менее, гамильтониан на с. ф. для КЭД-2 удается построить, используя киральную т. в. [15–17].

Киральную т. в. для КЭД-2 удобнее всего рассматривать, переходя к эквивалентной формулировке теории в бозонных переменных с помощью процедуры "бозонизации" [18, 19, 9]. Соответствующий бозонный лагранжиан имеет вид:

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) + \frac{\gamma}{2}e^{i\theta} : e^{i\varphi} : + \frac{\gamma}{2}e^{-i\theta} : e^{-i\varphi} :, \quad \gamma = \frac{Mme^C}{2\pi}, \quad m = \frac{e_{\rm el}}{\sqrt{\pi}}, \tag{3}$$

где $C = 0.577216$ – постоянная Эйлера, параметр θ определяет выбор инстантонного θ-вакуума в КЭД-2 [18, 19, 2], а символ нормального упорядочения означает, что в т. в. по γ исключаются диаграммы с закороченными линиями (это соответствует обычному значению символа нормального упорядочения в гамильтониане).

Этот лагранжиан описывает теорию массивного скалярного поля с экспоненциальным взаимодействием. При этом масса фермиона M играет роль константы взаимодействия, а, значит, киральная т. в. для КЭД-2 совпадает с обычной т. в. для бозонной теории (3). Пропагатор этой т. в. имеет простой вид (отличающийся лишь числовым множителем от стандартного пропагатора скалярного поля), но лагранжиан (3) содержит неполиномиальное взаимодействие. Вследствие этого в данном порядке т. в. по M присутствует бесконечное число диаграмм. Каждая отдельная диаграмма не имеет расходимостей, но оказывается, что некоторые бесконечные суммы диаграмм данного порядка по M могут расходиться, причем эта расходимость имеет ультрафиолетовую (УФ) природу [2, 15]. Поэтому вопрос о наличии УФ расходимостей в разложении по M бозонных функций Грина нетривиален, несмотря на то, что обычно двумерные модели свободны от УФ расходимостей. Заметим, что до настоящего времени этот вопрос полностью не был решен [2, 20].

Данная работа посвящена доказательству отсутствия УФ расходимостей во всех порядках т. в. по γ (а значит, по M) для функций Грина без вакуумных петель в бозонной теории (3). Под отсутствием УФ расходимостей понимается конечность результата в пределе снятия произвольной УФ регуляризации (введение промежуточной УФ регуляризации при вычислениях необходимо из-за отсутствия абсолютной сходимости сумм диаграмм в данном порядке т. в. по γ). Конечность результата имеет место вследствие того, что при суммировании всех вкладов данного порядка по γ в каждую функцию Грина все расходимости сокращаются.

2. ОТСУТСТВИЕ ОБЩЕЙ УФ РАСХОДИМОСТИ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ЧЛЕНАХ ВЫШЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО γ

Рассмотрим структуру диаграмм фейнмановской т. в. по γ для лагранжиана (3). В диаграммах встречаются два типа вершин с j внешними линиями ($j = 0, 1, 2, \ldots$), соответствующих двум членам взаимодействия в (3). Этим вершинам отвечают множители

$$i^{j+1}\,\frac{\gamma}{2}e^{i\theta} \qquad \text{и} \qquad i^{-j+1}\,\frac{\gamma}{2}e^{-i\theta} \tag{4}$$

для первого и второго типов, соответственно. Вершины с $j = 0$, т. е. без линий, должны рассматриваться как поддиаграммы несвязной диаграммы. Удобно отнести часть вершинных множителей $i^{\pm j}$ к линиям, внешним по отношению к вершине ($\pm i$ на каждую линию), тогда вершинные множители примут вид

$$i\,\frac{\gamma}{2}e^{i\theta} \qquad \text{и} \qquad i\,\frac{\gamma}{2}e^{-i\theta}. \tag{5}$$

Пропагатор $\Delta(x) = \langle 0|T\varphi(x)\,\varphi(0)|0\rangle$, где поле $\varphi(x)$ относится к свободной теории, в которую переходит (3) при $\gamma = 0$, имеет вид

$$\Delta(x) = \int d^2k\; e^{ikx}\Delta(k), \qquad \Delta(k) = \frac{i}{\pi}\frac{1}{(k^2 - m^2 + i0)}, \tag{6}$$

где $d^2k = dk_0 dk_1$, $kx = k_0x^0 + k_1x^1$.

Экспоненциальность взаимодействия теории с лагранжианом (3) позволяет переформулировать т. в. по γ на языке суперпропагаторов, т. е. сумм вкладов одного порядка по γ, соответствующих вариантам соединения пары вершин разным числом пропагаторов [2, 16]. Для пары вершин разного типа суперпропагатор равен

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\Delta(x)^m = e^{\Delta(x)}, \tag{7}$$

а для вершин одного типа он равен

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-1)^m\Delta(x)^m = e^{-\Delta(x)}. \tag{8}$$

В формулах (7) и (8) множитель $1/m!$ является симметрийным коэффициентом, который соответствует m параллельным линиям. Учтены также отнесенные к линиям части вершинных множителей (4) (см. текст после этой формулы). При таком подходе сумма всех обычных (в том числе несвязных) диаграмм с данным числом вершин и данным способом присоединения внешних линий описывается одной диаграммой, в которой каждая пара вершин соединена соответствующим суперпропагатором (под связностью всегда понимается связность в обычном смысле). Внешним линиям при этом сопоставляются обычные пропагаторы (6) с дополнительным множителем $\pm i$, который является отнесенной к этой линии частью вершинного множителя.

Перейдем в евклидово пространство (т. е. сделаем виков поворот) и введем какую-нибудь промежуточную УФ регуляризацию пропагатора (6) (например, методом высших производных).

Рассмотрим сумму (бесконечную) S'_n всех диаграмм порядка n т. в. по γ (в том числе несвязных), для которых способ прикрепления внешних линий к вершинам фиксирован, и задано, какой тип имеет каждая вершина. В терминах суперпропагаторов эту сумму можно изобразить в виде одной диаграммы, каждая пара вершин которой соединена соответствующим суперпропагатором (7) или (8).

Пусть S_n – сумма всех связных диаграмм, входящих в S'_n. Ее можно записать как

$$S_n = S'_n - S''_n, \tag{9}$$

где S''_n – сумма соответствующих несвязных диаграмм. Величину S''_n можно представить в виде суммы, каждое слагаемое которой есть сумма всех несвязных диаграмм с фиксированным разбиением исходной диаграммы на связные части. Каждое такое слагаемое представляет собой произведение нескольких величин $S_{\tilde{n}}$ с $\tilde{n} < n$. Теперь для каждой $S_{\tilde{n}}$ можно сделать разложение (9) и повторять приведенное рассуждение до тех пор, пока все очередные величины типа $S_{\tilde{n}}$ не совпадут с S_1. Учитывая, что $S_1 = S'_1$ (так как в первом порядке т. в. нет несвязных диаграмм), заключаем, что S_n можно представить в виде конечной суммы произведений величин S'_j с $j \leq n$:

$$S_n = \sum \prod_k S'_{j_k}, \tag{10}$$

$$\sum_k j_k = n. \tag{11}$$

Исследуем общую УФ расходимость (в пределе снятия промежуточной регуляризации) величины S_n. Под общей УФ расходимостью понимается степень расходимости, определяемая по индексу УФ расходимости диаграммы без учета возможных подрасходимостей, т. е. расходимостей поддиаграмм. При определении этого индекса считается, что все внутренние импульсы диаграммы стремятся к бесконечности. В координатном пространстве это соответствует стремлению друг к другу координат всех вершин. Если при этом в подынтегральном выражении возникает полюс порядка r_n, то условие отсутствия общей расходимости величины S_n имеет вид

$$2(n-1) - r_n > 0, \tag{12}$$

где учтено $n-1$ двумерных элементов объема, а еще один не нужно учитывать вследствие трансляционной инвариантности.

Для того чтобы оценить степень r_n полюса, разложим величину S_n по формуле (10), причем будем считать, что эта формула применяется к подынтегральным выражениям, а знаки интегрирования вынесены за знак суммы. Найдем степень r'_j полюса, возникающего при стремлении друг к другу координат всех вершин величины S'_j. Из вида пропагатора (6) легко заключить, что

$$\Delta(x) \sim \ln \frac{1}{x^2}, \qquad \text{при} \quad x \to 0. \tag{13}$$

Поэтому каждый суперпропагатор, соединяющий вершины разных типов, будет при стремлении координат этих вершин друг к другу давать полюс второго порядка (исходя из (7))

$$e^{\Delta(x)} \sim \frac{1}{x^2}, \qquad \text{при} \quad x \to 0, \tag{14}$$

а соединяющий вершины одного типа – будет давать ноль второго порядка (исходя из (8))

$$e^{-\Delta(x)} \sim x^2, \qquad \text{при} \quad x \to 0. \tag{15}$$

Представим подынтегральное выражение величины S'_j в терминах суперпропагаторов, как это описано после формулы (8). Поскольку при этом каждая пара вершин соединяется суперпропагатором одного из двух типов, то, используя асимптотики (14) и (15), легко найти полную асимптотику при стремлении координат всех вершин друг к другу, т. е. найти r'_j.

Пусть в S'_j имеется l_1 вершин первого типа и l_2 вершин второго, $l_1 + l_2 = j$. Тогда число пропагаторов, соединяющих вершины разных типов, и число пропагаторов, соединяющих вершины одного типа, соответственно, равны

$$l_1 l_2 \qquad \text{и} \qquad \frac{l_1(l_1-1)}{2} + \frac{l_2(l_2-1)}{2}. \tag{16}$$

В результате общая степень полюса определяется соотношением

$$r'_j = 2\left(l_1 l_2 - \frac{l_1(l_1-1)}{2} - \frac{l_2(l_2-1)}{2}\right) = j - (l_1 - l_2)^2 \leq j. \tag{17}$$

Из формулы (10) следует, что

$$r_n = \max \sum_k r'_{j_k}, \tag{18}$$

где максимум берется по всем слагаемым (10). Отсюда, используя оценку (17) и условие (11), находим, что

$$r_n \leq \max \sum_k j_k = n. \tag{19}$$

С помощью этого неравенства можно оценить левую часть условия (12) отсутствия общей расходимости величины S_n как

$$2(n-1) - r_n \geq 2(n-1) - n = n - 2, \tag{20}$$

и заключить, что такая расходимость отсутствует, если

$$n > 2. \tag{21}$$

Понятно, что при $n = 1$ УФ расходимость отсутствует (с учетом наличия символа нормального упорядочения в лагранжиане (3), вследствие чего нет закороченных линий), а значит, единственный случай, когда общая расходимость суммы всех связных диаграмм порядка n по γ может присутствовать, – это $n = 2$.

3. АНАЛИЗ РАСХОДИМОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО γ

При $n = 2$ условие (12) нарушается, только если $r_2 \geq 2$. В соответствии с формулой (18) это может произойти, только если $r'_2 \geq 2$, так как $r'_1 = 0$ (из-за уже упоминавшегося отсутствия закороченных линий) и должно выполняться условие (11). А это, как видно из формулы (17), может выполняться только при $l_1 = l_2$, причем в этом случае $r'_2 = 2$, и, следовательно, $r_2 = 2$. Таким образом, заключаем, что общая УФ расходимость имеет место только для суммы всех связных диаграмм второго порядка по γ с вершинами разных типов ($l_1 = l_2 = 1$) и с фиксированным способом прикрепления внешних линий к вершинам. Эта расходимость оказывается логарифмической, так как левая часть условия (12) равна нулю.

Описанная УФ расходящаяся сумма диаграмм дает вклад в любую функцию Грина во втором порядке т. в. по γ. Исследуем наличие общей УФ расходимости у суммы всех таких вкладов. Для N-точечной функции Грина ($N > 0$) сумма всех вкладов второго порядка по γ, соответствующих фиксированному типу вершин (в случае вершин разных типов) находится из лагранжиана (3) с учетом формул (4)-(8)

$$G_N^{(2)}(y_1, \ldots, y_N) = -\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \int d^2x_1 d^2x_2 \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{k_i=1,2} i\,(-1)^{k_i+1} \Delta(y_i - x_{k_i}) \right) e^{\Delta(x_1 - x_2)}. \tag{22}$$

Присутствующий здесь знак суммы осуществляет суммирование по способам присоединения каждой внешней линии диаграммы к разным внутренним вершинам. При $(x_1 - x_2) \to 0$ стоящее в (22) под знаком произведения выражение в скобках ведет себя как

$$\sum_{k_i=1,2} i\,(-1)^{k_i+1} \Delta(y_i - x_{k_i}) = i\Big(\Delta(y_i - x_1) - \Delta(y_i - x_2)\Big) \sim O(x_1 - x_2), \tag{23}$$

т. е. улучшает сходимость интеграла в точке $(x_1 - x_2) = 0$. Так как без учета этого факта было показано, что при интегрировании в окрестности этой точки (т. е. при стремлении друг к другу координат вершин) может возникнуть не более чем логарифмическая УФ расходимость, заключаем, учитывая асимптотику (23), что при $N > 0$ N-точечная функция Грина во втором порядке т. в. по γ не содержит общей УФ расходимости.

Поскольку, как уже упоминалось, в первом порядке т. в. по γ УФ расходимостей нет, то во втором порядке суммы диаграмм функций Грина не могут содержать расходящихся поддиаграмм. Это означает, что из полученного отсутствия общей (т. е. не учитывающей возможные подрасходимости) УФ расходимости следует реальная УФ конечность N-точечной функции Грина во втором порядке т. в. по γ при $N > 0$.

4. ОТСУТСТВИЕ РАСХОДИМОСТЕЙ ПОДДИАГРАММ

Выясним теперь, могут ли существовать УФ расходимости величины S_n при $n > 2$ за счет присутствия УФ расходящихся сумм поддиаграмм.

При $n = 3$ УФ расходиться может только сумма поддиаграмм второго порядка по γ с вершинами разного типа (см. начало п. 3). В величину S_n входят только связные диаграммы, поэтому у любой поддиаграммы второго порядка всегда есть хотя бы одна внешняя (по отношению к ней) линия. В общей сумме всех диаграмм, составляющих S_n будет присутствовать суммирование по всем способам присоединения этой линии к вершинам поддиаграммы, что полностью аналогично рассмотренному в п. 3 суммированию по способам присоединению внешних линий к диаграмме второго порядка. Поэтому использование формул, аналогичных (22) и (23), позволяет заключить, что сумма поддиаграмм второго порядка по γ оказывается УФ конечной. Отсюда следует, что при $n = 3$ у величины S_n реально отсутствует УФ расходимость.

Это, в частности, означает, что при $n = 4$ опять может УФ расходиться только сумма поддиаграмм второго порядка, и можно повторить приведенное рассуждение для этого случая. Далее, проводя рассуждение по индукции, получаем результат: сумма всех связных диаграмм порядка $n > 2$ т. в. по γ является реально (т. е. не только по подсчету индекса УФ расходимости) УФ конечной. Этот результат верен для диаграмм с любым числом внешних линий, в частности, и для вакуумных диаграмм при $n > 2$.

Объединяя полученный результат с выводами п. 3, получаем реальную УФ конечность всех связных диаграмм N-точечной функции Грина во всех порядках т. в. по γ при $N > 0$ (т. е. кроме вакуумных диаграмм). Отсюда следует УФ конечность всех функций Грина без вакуумных петель, поскольку диаграммы для них представляют собой произведения связных невакуумных диаграмм.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для т. в. по γ (а значит, по массе фермиона M) бозонной формы (3) теории КЭД-2 удается доказать УФ конечность следующих величин:
1) в порядках $n > 2$ УФ конечна сумма всех связных диаграмм с любым (в частности, нулевым) числом внешних линий; это верно в том числе и при любом фиксированном способе подключения внешних линий диаграммы к ее вершинам;
2) во втором порядке УФ конечны все невакуумные функции Грина, т. е. сумма всех диаграмм с ненулевым числом внешних линий после суммирования вкладов, соответствующих всем способам подключения внешних линий диаграммы к ее вершинам.
Отсюда, в частности, следует УФ конечность во всех порядках т. в. по γ функций Грина без вакуумных петель.

УФ расходимость присутствует только во втором порядке т. в. по γ для суммы всех вакуумных диаграмм и для суммы всех диаграмм с ненулевым числом внешних линий при фиксированном способе подключения внешних линий диаграммы к ее вершинам. Указанная расходимость логарифмическая. Отсюда, в частности, следует логарифмическая УФ расходимость вакуумной функции Грина, причем только во втором порядке т. в. по γ.

Поскольку существенными являются только функции Грина без вакуумных петель, можно говорить о конечности киральной теории возмущений для КЭД-2.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства образования России, грант № E00-3.3-316.

Список литературы

[1] *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1962. V. 128. P. 2425.

[2] *C. Adam.* Annals Phys. 1997. V. 259. P. 1. hep-th/9704064.

[3] *P. A. M. Dirac.* Rev. Mod. Phys. 1949. V. 21. P. 392.

[4] *J. R. Clauder, H. Leutwyler, L. Streit.* Nuovo Cimento A. 1970. V. 66. P. 536.

[5] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov.* Lett. Math. Phys. 1981. Vol. 5. P. 239.

[6] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, E. V. Prokhvatilov.* Lett. Math. Phys. 1981. Vol. 5. P. 437.

[7] *V. A. Franke, Yu. V. Novozhilov, S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov.* Quantum Field Theory in Light-Front coordinates. In book: Quantum Theory in honour of Vladimir A. Fock, Part 1; Unesco, St. Petersburg University, Euro-Asian Physical Society, 1998; P. 38. hep-th/9901029.

[8] *M. Burkardt, A. Langnau.* Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1187, 3857.

[9] *E. V. Prokhvatilov, H. W. L. Naus, H.-J. Pirner.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 2933. hep-th/9406275.

[10] *Е. В. Прохватилов, В. А. Франке.* ЯФ. 1989. Т. 49. Вып. 4. С. 1109.

[11] *Е. В. Прохватилов, В. А. Франке.* ЯФ. 1996. Т. 59. Вып. 11. С. 2105.

[12] *A. B. Bylev, V. A. Franke, E. V. Prokhvatilov.* J. Phys. G. 1998. V. 24 P. 939. hep-th/9711022.

[13] *С. А. Пастон, В. А. Франке.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 3. С. 399. hep-th/9901110.

[14] *С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 3. С. 417. hep-th/0002062.

[15] *S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke.* QED-2 light-front Hamiltonian reproducing all orders of covariant chiral perturbation theory. hep-th/9910114.

[16] *S. A. Paston, E. V. Prokhvatilov, V. A. Franke.* On the construction of corrected light-front Hamiltonian for QED-2. hep-th/0011224.

[17] *С. А. Пастон, Е. В. Прохватилов, В. А. Франке.* ТМФ. 2002. Т. 131. № 1. С. 84.

[18] *S. Coleman.* Ann. Phys. 1976. V. 101. P. 239.

[19] *Е. В. Прохватилов.* ТМФ. 1991. Т. 88. С. 685.

[20] *C. Adam.* Частное сообщение. 1999.