**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 153, № 2
ноябрь, 2007**

© 2007 г. **С. А. Пастон*, В. А. Франке***

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВЛОЖЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ, ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА

Исследуется подход, в котором независимыми переменными при описании гравитации являются функции вложения пространства-времени в плоское пространство большего числа измерений. Предложен канонический формализм для такой теории, при построении которого дополнительно налагаются связи, являющиеся частью уравнений Эйнштейна. В результате получена теория, обладающая восьмипараметрической калибровочной симметрией и эквивалентная общей теории относительности Эйнштейна после частичной фиксации калибровки либо при переопределении метрики в виде величины, инвариантной относительно дополнительных калибровочных преобразований. Записано действие для такой теории.

Ключевые слова: изометрическое вложение, теория гравитации, канонический формализм.

1. ВВЕДЕНИЕ

При обычном описании гравитации в рамках общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна четырехмерное пространство-время представляет собой риманово (точнее, псевдориманово) пространство. Примером риманова пространства является d-мерная поверхность в плоском пространстве большего числа измерений, если считать, что метрика этой поверхности индуцирована тривиальной метрикой объемлющего пространства. Однако оказывается, что поверхность в плоском объемлющем пространстве является не просто частным случаем риманова пространства, но в определенной степени рассмотрение произвольного риманова пространства может быть заменено рассмотрением такой поверхности. Согласно теореме Жане–Картана [1], [2] (см., например, [3], примечание 18) произвольное риманово пространство W^d размерности d может быть локально изометрически вложено в любое риманово пространство размерности, большей или равной

$$N = \frac{d(d+1)}{2}, \tag{1}$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: paston@pobox.spbu.ru, franke@pobox.spbu.ru

а значит, в частности, в плоское пространство такой размерности. На случай неположительной сигнатуры пространства эта теорема была обобщена Фридманом [4].

Данная теорема гарантирует существование изометрического вложения только локально, т.е. для какой-то конечной части многообразия. Отметим, что если поставить вопрос о вложении всего многообразия в целом, то, в зависимости от его топологии, необходимая размерность N может сильно возрасти (см. [3], примечание 18).

Теорема Жане–Картана гарантирует только существование, но не единственность вложения. Это означает, что могут существовать разные поверхности, обладающие одинаковой метрикой. В этом случае говорят о возможности изометрического изгибания поверхности. Например, ясно, что единственность вложения гарантированно отсутствует при $N > d(d+1)/2$, так как можно сначала провести вложение в пространство размерности $d(d+1)/2$, а затем его, в свою очередь, изометрически вкладывать разными способами в N-мерное пространство в виде части цилиндра. Сравнение числа переменных и числа уравнений позволяет надеяться в ситуации общего положения на единственность вложения (с точностью до тривиальных сдвигов и поворотов в объемлющем пространстве) только при точном выполнении условия (1). Действительно, метрика $g_{\mu\nu}$ имеет $d(d+1)/2$ независимых компонент, а значит, существует столько же уравнений на N функций, описывающих вложение. Тем не менее в каких-то случаях единственность может отсутствовать и при выполнении условия (1). В качестве нетривиального примера поверхности, допускающей изометрическое изгибание, можно привести достаточно малую, но конечную часть сферы.

Согласно условию (1) для четырехмерного пространства-времени в качестве объемлющего достаточно взять десятимерное пространство. Наиболее удобно выбрать его сигнатуру в виде $(+,-,-,\ldots,-)$, т.е. считать объемлющим пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,9}$. Поскольку рассмотрение пространства-времени как риманова пространства может быть заменено, с указанными оговорками, рассмотрением четырехмерной поверхности W^4 в десятимерном пространстве $\mathbb{R}^{1,9}$, возникает идея: при описании гравитации в качестве независимых переменных использовать не поле метрики $g_{\mu\nu}(x)$, а переменные, описывающие поверхность W^4. В качестве таких переменных наиболее удобно выбрать функцию вложения $y^a(x^\mu)$, осуществляющую отображение

$$y^a(x^\mu)\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{1,9}. \tag{2}$$

Здесь и далее индексы $a, b, \ldots$ принимают значения $0, 1, 2, \ldots, 9$, а $\mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, 3$. Предполагается, что y^a – лоренцевы координаты в $\mathbb{R}^{1,9}$ и индексы $a, b, \ldots$ можно опускать и поднимать с помощью постоянной псевдоевклидовой метрики объемлющего пространства $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, \ldots, -1)$.

Впервые эта идея была предложена в 1975 г. в докладе Редже и Тейтельбойма и опубликована в работе [5]. На таком пути можно пытаться изучить еще один подход к квантованию гравитации и, в частности, по-новому исследовать вопросы причинности в этой теории, так как в объемлющем плоском пространстве имеются

фиксированные световые конусы. Кроме того, здесь возможна связь с другими теориями, использующими дополнительные измерения, такими как теория суперструн.

В качестве действия теории в работе [5] было взято стандартное для ОТО выражение

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\, R, \tag{3}$$

где R – скалярная кривизна, $g = \det g_{\mu\nu}$, в котором метрика является индуцированной и выражается через функцию вложения:

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu y^a \, \partial_\nu y_a. \tag{4}$$

В результате варьирования этого действия по $y^a(x)$ возникают уравнения теории вложения:

$$\nabla_\mu (G^{\mu\nu} \partial_\nu y^a) = 0, \tag{5}$$

где $G^{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, составленный из метрики (4), а ∇_μ – соответствующая этой метрике ковариантная производная. В случае наличия материи с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ уравнения (5) приобретают вид

$$\nabla_\mu ((G^{\mu\nu} - \varkappa T^{\mu\nu}) \partial_\nu y^a) = 0. \tag{6}$$

Поскольку добавление материи не играет принципиальной роли при описании теории, для простоты будем далее рассматривать гравитационное поле в отсутствие материи.

Уравнения (5) являются более общими, чем уравнения Эйнштейна, т.е. любое решение уравнений Эйнштейна будет решением уравнений теории вложения, но не наоборот. Таким образом, теория вложения оказывается не эквивалентной ОТО. В ней присутствуют лишние решения. Возникает вопрос, нельзя ли ввести для теории вложения такие дополнительные ограничения, чтобы она стала эквивалентной ОТО.

Для того чтобы исключить лишние решения, в работе [5] была предложена следующая идея: в дополнение к уравнениям движения, полученным из действия, искусственно наложить часть уравнений Эйнштейна $G_{\mu\perp} = 0$, где символ $\perp$ означает направление, ортогональное поверхности постоянного времени. Обсуждению такой возможности посвящен раздел 3 настоящей работы. В нем показано, что, по крайней мере в ситуации общего положения, для обеспечения эквивалентности уравнениям Эйнштейна достаточно потребовать выполнения уравнений $G_{\mu\perp} = 0$ только в начальный момент времени, т.е. эти уравнения аналогичны связям первого рода в каноническом формализме. Более подробно получение этого результата описано в работе [6]. Там же можно найти подробное изложение формализма, удобного для описания теории вложения. Основные уравнения этого формализма приведены в разделе 2.

Следует отметить, что искусственное, *ad hoc*, введение в теорию дополнительных уравнений кажется недостаточно удовлетворительным, что отмечается в работе [7]. Там также говорится о том, что хорошим выходом из положения был бы подбор

такой модификации действия, из которой следовали бы требуемые дополнительные уравнения, но отмечается, что неизвестно, как это сделать. Требуемая модификация действия будет предложена в разделе 5 настоящей работы.

Предпринимались попытки построения канонического формализма для теории вложения. Как известно, отбрасывая поверхностные члены, гравитационное действие можно привести к виду, в котором лагранжиан содержит только первые производные по времени от метрики $g_{\mu\nu}$. Поскольку формула (4) содержит дифференцирование, оказывается, что лагранжиан будет содержать вторые производные по времени от функции вложения y^a. Это сильно затрудняет построение канонического формализма. Тем не менее в работе [8] изучалась возможность построения канонической формулировки данной теории с помощью разработанных для такого случая специальных методов. Продвинуться на этом пути удалось только после полной фиксации калибровки.

При внимательном рассмотрении оказывается, что уравнения теории вложения не содержат производных по времени выше вторых от y^a. Это наводит на мысль, что существует такой способ переписать действие, при котором лагранжиан содержит только первые производные по времени. Еще в работе [5] было замечено, что этого можно добиться, записывая действие в форме Арновитта–Дезера–Мизнера [9]. При такой записи действия появляется возможность развивать канонический формализм обычным способом, однако в теории возникают чрезвычайно сложные связи. Их вид исследовался в работе [10] и было обнаружено, что часть связей не удается записать в явном виде, их можно задать лишь в виде условия наличия совпадающих корней у некоторых двух полиномов.

В работе [5] обсуждалась возможность дополнительно к возникающим связям наложить условия $G_{\mu\perp} = 0$, также рассматриваемые как связи, однако вопрос о замыкании полученной объединенной системы связей остался открытым. Построению такого канонического формализма с дополнительными связями посвящен раздел 4 данной работы. Найденная система связей, которую в данном случае удается написать явно, отличается от приведенной в работе [5], поскольку в последней возникающие ограничения на обобщенные импульсы не были учтены корректно. Удается показать замыкание найденной системы связей.

В разделе 5 строится и анализируется действие, соответствующее найденной канонической формулировке теории.

Подробный список литературы, связанной с теорией вложения и смежными с ней вопросами, можно найти в обзоре [11].

2. КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ФОРМАЛИЗМА ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ

Описание поверхности W^4 в плоском пространстве $\mathbb{R}^{1,9}$ с помощью функции вложения $y^a(x)$ обладает инвариантностью относительно преобразований координат x^μ на поверхности. Относительно этих преобразований компоненты функции $y^a(x)$ ведут себя как скалярные величины. Поэтому можно рассматривать функцию $y^a(x)$

как заданное в четырехмерном римановом пространстве десятикомпонентное поле, обладающее индексом глобальной внутренней симметрии $SO(1,9)$, соответствующей преобразованиям Лоренца объемлющего пространства $\mathbb{R}^{1,9}$.

Вследствие скалярного характера величины $y^a(x)$ ее ковариантная производная совпадает с обычной:

$$\nabla_\mu y^a = \partial_\mu y^a \equiv e^a_\mu. \tag{7}$$

Аналогично ковариантные производные от величин, имеющих греческие и латинские индексы, строятся обычным образом, как если бы латинских индексов у них не было. Величина e^a_μ напоминает репер, используемый при реперном описании гравитации, но отличается от обычного репера тем, что ее индекс a пробегает больше значений, чем индекс μ. Эту величину можно рассматривать как совокупность четырех (если брать $\mu = 0,1,2,3$) векторов объемлющего пространства. Эти векторы образуют базис (вообще говоря, неортогональный) в подпространстве, касательном к поверхности W^4 в данной точке. В то же время величина e^a_μ при фиксированном a есть вектор относительно индекса μ.

Индуцированная метрика имеет вид

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab} = e^a_\mu e_{\nu,a} = \partial_\mu y^a\, \partial_\nu y_a. \tag{8}$$

Удобно ввести величину

$$e^\mu_a = g^{\mu\nu} e_{\nu,a}, \qquad g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha. \tag{9}$$

Тогда, как легко заметить, будут выполняться равенства

$$e^\gamma_a e^a_\beta = \delta^\gamma_\beta, \qquad g^{\mu\nu} = e^{\mu,a} e^\nu_a. \tag{10}$$

Из требования ковариантного постоянства метрики, отсутствия кручения (вследствие чего $\nabla_\mu e^a_\nu = \nabla_\nu e^a_\mu$) и вида метрики (8) можно установить (см. [6]), что

$$e_{\alpha,a} \nabla_\mu e^a_\nu = 0, \tag{11}$$

откуда следует выражение для связности

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = e^\beta_a\, \partial_\mu e^a_\nu = e^\beta_a\, \partial_\mu\, \partial_\nu y^a. \tag{12}$$

Однако в данном формализме в вычислениях можно обходиться без такой нековариантной величины как связность, что является его несомненным удобством. Обычно без использования связности нельзя записать формулу для ковариантного дифференцирования, но здесь это возможно. Запишем ковариантную производную от вектора, используя свойство (11):

$$\nabla_\alpha a^\mu = e^\mu_a e^a_\nu \nabla_\alpha a^\nu = e^\mu_a \nabla_\alpha (e^a_\nu a^\nu) - e^\mu_a (\nabla_\alpha e^a_\nu) a^\nu = e^\mu_a \nabla_\alpha (e^a_\nu a^\nu) = e^\mu_a\, \partial_\alpha (e^a_\nu a^\nu). \tag{13}$$

Аналогичные формулы можно написать для ковариантного дифференцирования тензоров произвольного ранга. Получается простое правило ковариантного дифференцирования: с помощью сворачивания по каждому индексу с величиной e^a_ν

нужно "перенести" тензор из риманова пространства в объемлющее, взять обычную производную, а затем "перенести" обратно, сворачивая с e^{ν}_{a}. В случаях, когда это не приводит к недоразумениям, будем для краткости вместо свертки $e^{a}_{\nu}a^{\nu}$ писать просто a^{a} (аналогично и для величин с несколькими индексами).

Введем чрезвычайно полезную при проведении вычислений величину $\Pi^{a}_{b}(x)$ – проектор на плоскость, касательную к поверхности W^4 в данной точке. Легко проверить, что такой проектор можно записать в виде

$$\Pi^{a}_{b} = e^{a}_{\mu}e^{\mu}_{b}. \tag{14}$$

Удобно также ввести проектор на пространство, дуальное к касательной плоскости:

$$\Pi_{\perp}{}^{a}_{b} = \delta^{a}_{b} - \Pi^{a}_{b}. \tag{15}$$

Запишем некоторые полезные при проведении вычислений свойства введенных объектов (доказательство см. в [6]):

$$\begin{gathered}\Pi_{ab} = \Pi_{ba}, \qquad \delta\Pi_{ab} = -\delta\Pi_{\perp ab}, \qquad \Pi^{a}_{b}(\delta\Pi^{b}_{c})\Pi^{c}_{d} = 0,\\ \Pi_{\perp}{}^{a}_{b}(\delta\Pi^{b}_{c})\Pi_{\perp}{}^{c}_{d} = 0, \qquad \delta\Pi_{ab} = \Pi^{c}_{a}(\delta\Pi_{cd})\Pi_{\perp}{}^{d}_{b} + \Pi_{\perp}{}^{c}_{a}(\delta\Pi_{cd})\Pi^{d}_{b}.\end{gathered} \tag{16}$$

Важную роль при описании геометрии вложенных поверхностей играет вторая основная форма поверхности $b^{a}_{\mu\nu}$. По определению (см., например, [3], гл. VII, § 3) для любого касательного векторного поля f^{b}

$$(\partial_{\mu}f^{b})\Pi_{\perp}{}^{a}_{b} = b^{a}_{\mu\nu}f^{\nu}, \tag{17}$$

откуда, замечая, что $f^{b}\Pi_{\perp}{}^{a}_{b} = 0$, получаем равенство

$$b^{a}_{\mu\nu} = e^{b}_{\nu}\,\partial_{\mu}\Pi^{a}_{b}. \tag{18}$$

Отметим, что для $b^{a}_{\mu\nu}$ тождественно выполняется условие

$$\Pi^{b}_{a}b^{a}_{\mu\nu} = 0, \tag{19}$$

т.е. $b^{a}_{\mu\nu}$ можно рассматривать как нумеруемый индексами μ, ν набор векторов со значком a, ортогональных касательной плоскости. Для второй основной формы поверхности можно получить еще одно удобное представление. Заменив в (18) Π^{a}_{b} на $-\Pi_{\perp}{}^{a}_{b}$ и перебросив производную на e^{b}_{ν}, получаем равенство

$$b^{a}_{\mu\nu} = \Pi_{\perp}{}^{a}_{b}\,\partial_{\mu}e^{b}_{\nu} = \Pi_{\perp}{}^{a}_{b}\,\partial_{\mu}\partial_{\nu}y^{b}, \tag{20}$$

откуда сразу видна симметричность $b^{a}_{\mu\nu}$ по нижним индексам. Легко также заметить, что формулу (20) можно переписать в явно ковариантном виде:

$$b^{a}_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}e^{a}_{\nu} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}y^{a}. \tag{21}$$

В случае, когда коразмерность поверхности равна единице, а значит, $\Pi_{\perp ab} = n_a n_b$, вследствие условия (19) вместо $b^{a}_{\mu\nu}$ достаточно рассматривать величину

$$K_{\mu\nu} = n_a b^{a}_{\mu\nu}, \tag{22}$$

которую в этом случае также называют второй основной (или второй квадратичной) формой поверхности.

Вторая основная форма поверхности играет важную роль при описании гравитации в терминах функции вложения, поскольку в случае плоского объемлющего пространства именно через нее выражается тензор кривизны Римана–Кристоффеля:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = b^a_{\alpha\mu} b_{a,\beta\nu} - b^a_{\alpha\nu} b_{a,\beta\mu}. \tag{23}$$

Отметим, что это уравнение представляет собой уравнение Гаусса для случая поверхности, вложенной в плоское объемлющее пространство. Скалярную кривизну можно записать в виде

$$R = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} = (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) b^a_{\alpha\mu} b_{a,\beta\nu}. \tag{24}$$

Подставляя выражение (23) в известное представление для тензора Эйнштейна

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{1}{4} g_{\xi\zeta} E^{\mu\xi\alpha\beta} E^{\nu\zeta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{25}$$

где $E^{\mu\xi\alpha\beta} = \varepsilon^{\mu\xi\alpha\beta}/\sqrt{-g}$, $\varepsilon^{\mu\xi\alpha\beta}$ – единичный антисимметричный тензор, его можно записать в виде

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\xi\zeta} E^{\mu\xi\alpha\beta} E^{\nu\zeta\gamma\delta} b^a_{\alpha\gamma} b_{a,\beta\delta}. \tag{26}$$

Это выражение для тензора Эйнштейна будет использоваться ниже.

3. СРАВНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ С УРАВНЕНИЯМИ ЭЙНШТЕЙНА

Уравнения теории вложения (5) представляют собой десять уравнений, получившихся в результате варьирования по десяти компонентам функции вложения y^a. Однако четыре из них являются тождествами. Действительно, уравнения (5) можно переписать в виде совокупности уравнений

$$\Pi^b_a \nabla_\mu (G^{\mu\nu} e^a_\nu) = 0, \tag{27}$$

$$\Pi_\perp{}^b_a \nabla_\mu (G^{\mu\nu} e^a_\nu) = 0. \tag{28}$$

С учетом формул (21) и (19) первое из них эквивалентно записывается в виде

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{29}$$

и выполняется тождественно вследствие тождества Бьянки. Таким образом, остается только шесть независимых уравнений вложения (28). Опять используя (21) и учитывая тождество (29), их можно переписать в виде

$$G^{\mu\nu} b^a_{\mu\nu} = 0. \tag{30}$$

Нужно помнить, что величина $b^a_{\mu\nu}$ рассматривается как набор векторов со значком a, направленных ортогонально касательной плоскости, поэтому уравнения (30) представляют собой только шесть независимых уравнений.

Перепишем уравнение (30), воспользовавшись формулой (26):

$$g_{\xi\zeta}E^{\mu\xi\alpha\beta}E^{\nu\zeta\gamma\delta}b^b_{\alpha\gamma}b_{b,\beta\delta}b^a_{\mu\nu}=0. \tag{31}$$

При такой записи видно, что уравнения теории вложения не содержат производных выше вторых. Интересно отметить, что таким же свойством обладают и уравнения Эйнштейна, если записать их в терминах y^a:

$$g_{\xi\zeta}E^{\mu\xi\alpha\beta}E^{\nu\zeta\gamma\delta}b^b_{\alpha\gamma}b_{b,\beta\delta}=0. \tag{32}$$

Будем сравнивать уравнения теории вложения и уравнения Эйнштейна. Для этого зафиксируем выбор времени на поверхности W^4, т.е. зададим на ней систему трехмерных пространственноподобных поверхностей W^3, соответствующих постоянным значениям времени. Эти поверхности описываются функциями вложения

$$y^a(x^i)\equiv y^a(x^\mu)|_{x^0=t}. \tag{33}$$

Здесь и далее индексы $i,k,\ldots$ принимают значения $1,2,3$. Для каждой из таких поверхностей можно ввести все величины, описанные в разделе 2, будем помечать их цифрой 3 над буквой: $\overset{3}{e}{}^a_i$, $\overset{3}{g}_{ik}$, $\overset{3}{\Pi}_{ab}$, $\overset{3}{\Pi}_{\perp ab}$, $\overset{3}{E}_{abc}$, $\overset{3}{b}{}^a_{ik}$, $\overset{3}{R}_{iklm}$, $\ldots$. Отметим, что помеченные цифрой 3 тензоры с верхними латинскими индексами всегда получаются в результате подъема этих индексов с помощью матрицы $\overset{3}{g}{}^{ik}$, обратной к матрице $\overset{3}{g}_{ik}$. Введем также единичный вектор n_a, касательный в данной точке к поверхности W^4, но ортогональный W^3. Из первого равенства в (10) следует, что

$$e^0_a e^a_i=0 \quad\Rightarrow\quad e^0_a \overset{3}{e}{}^a_i=0, \tag{34}$$

откуда находим

$$n_a=\frac{e^0_a}{\sqrt{e^0_b e^{0,b}}}=\frac{e^0_a}{\sqrt{g^{00}}}. \tag{35}$$

Для определенности можно считать, что $n_0>0$. Понятно, что

$$\Pi_{ab}=\overset{3}{\Pi}_{ab}+n_a n_b, \qquad \Pi_{\perp ab}=\overset{3}{\Pi}_{\perp ab}-n_a n_b. \tag{36}$$

Полезно получить еще одно представление для вектора n^a. Используя формулы (35) и (36), имеем

$$\overset{3}{\Pi}_{\perp b}{}^a e^b_0=n^a n_b e^b_0=\frac{n^a e^0_b e^b_0}{\sqrt{g^{00}}}=\frac{n^a}{\sqrt{g^{00}}}, \tag{37}$$

откуда

$$n^a=\sqrt{g^{00}}\overset{3}{\Pi}_{\perp b}{}^a\,\partial_0 y^b=\frac{\overset{3}{\Pi}_{\perp b}{}^a\,\partial_0 y^b}{\sqrt{\partial_0 y^c \overset{3}{\Pi}_{\perp cd}\,\partial_0 y^d}}. \tag{38}$$

Как известно, вторая основная форма поверхности W^3 как подмногообразия в W^4 дается формулой

$$K_{ik}=-\nabla_i n_k, \tag{39}$$

где ковариантная производная определяется римановой связностью в W^4. Используя правило ковариантного дифференцирования (13), находим, что

$$K_{ik} = -e^a_k \partial_i (e^\mu_a n_\mu) = -\overset{3}{e}{}^a_k \, \partial_i n_a = n_a \, \partial_i \overset{3}{e}{}^a_k = n_a \overset{3}{b}{}^a_{ik} = n_a \, \partial_i \partial_k y^a. \tag{40}$$

Применяя формулу (20) для вторых основных форм поверхностей W^4 и W^3 и используя второе из соотношений (36), легко получить простой закон сложения вторых основных форм:

$$b^a_{ik} = \overset{3}{b}{}^a_{ik} - n^a K_{ik}. \tag{41}$$

Используя приведенные соотношения, четыре из взятых в форме (32) уравнений Эйнштейна, которые можно записать как

$$n_a G^{ac} = 0, \tag{42}$$

удается представить в виде совокупности одного уравнения

$$\big(\overset{3}{g}{}^{ik}\overset{3}{g}{}^{lm} - \overset{3}{g}{}^{il}\overset{3}{g}{}^{km}\big)\overset{3}{b}{}^a_{ik}\,\overset{3}{b}{}^b_{lm} n_a n_b - \overset{3}{R} = 0 \tag{43}$$

и трех уравнений

$$\big(\overset{3}{g}{}^{ik}\overset{3}{g}{}^{lm} - \overset{3}{g}{}^{im}\overset{3}{g}{}^{lk}\big)\overset{3}{b}{}^a_{im}\,\partial_l n_a = 0 \tag{44}$$

(см. [6]). Применяя тождество

$$\begin{aligned}\overset{3}{\Pi}{}^b_{\perp a}\overset{3}{\nabla}_l\big(\big(\overset{3}{g}{}^{ik}\overset{3}{g}{}^{lm} - \overset{3}{g}{}^{im}\overset{3}{g}{}^{lk}\big)\,\overset{3}{b}{}_{a,im}\big) &= \overset{3}{\Pi}{}^b_{\perp a}\,\overset{3}{g}{}^{ik}\overset{3}{g}{}^{lm}\big(\overset{3}{\nabla}_l\overset{3}{\nabla}_i\,\overset{3}{e}{}^a_m - \overset{3}{\nabla}_i\overset{3}{\nabla}_l\overset{3}{e}{}^a_m\big) = \\ &= \overset{3}{\Pi}{}^b_{\perp a}\,\overset{3}{g}{}^{ik}\overset{3}{g}{}^{lm}\overset{3}{R}{}^n{}_{mli}\,\overset{3}{e}{}^a_n = 0,\end{aligned} \tag{45}$$

в котором использована формула (21), уравнения (44) удобно преобразовать к виду

$$\overset{3}{\nabla}_l\big(\big(\overset{3}{g}{}^{ik}\overset{3}{g}{}^{lm} - \overset{3}{g}{}^{im}\overset{3}{g}{}^{lk}\big)\,\overset{3}{b}{}^a_{im}\,n_a\big) = 0. \tag{46}$$

Как легко заметить, уравнения (43) и (46) не содержат производных по времени от $y^a(x)$ выше первых, причем такие производные входят в уравнения только через величину n^a. Поэтому четыре уравнения (42) можно считать связями, т.е. условиями, ограничивающими начальные данные $y^a(x^i)$, $\partial_0 y^a(x^i)$, задаваемые на поверхности $x^0 = \text{const}$. Интересно, что уравнения (42), которые были связями в ОТО, остались таковыми и в теории вложения, несмотря на то что независимые переменные ОТО (метрика $g_{\mu\nu}$) выражаются через независимые переменные теории вложения (функции $y^a(x)$) с помощью дифференцирования. Будем называть уравнения (42) эйнштейновскими связями.

Рассмотрим теперь полученные ранее уравнения теории вложения (30), записав их в форме

$$G^{ab} b^c_{ab} = 0. \tag{47}$$

Предположим, что они выполнены, причем будем их рассматривать, как описывающие изменение со временем трехмерной пространственноподобной поверхности W^3. Выясним, какие дополнительные ограничения нужно ввести в теорию, чтобы она стала эквивалентна ОТО, т.е. чтобы выполнялись уравнения Эйнштейна. Только что проведенный анализ показывает, что для этого, как минимум, нужно выбрать начальные данные – значения $y^a(x^i)$ и $\partial_0 y^a(x^i)$ в начальный момент времени – так, чтобы они удовлетворяли эйнштейновским связям.

Будем считать, что это сделано, т.е. в начальный момент выполнены уравнения (42). Тогда, используя формулу (36), можно в начальный момент времени вместо (47) написать

$$G^{ab}\,{}^3e^i_a\,{}^3e^k_b\,b^h_{ik}=0. \tag{48}$$

Входящую в это уравнение величину b^h_{ik} можно воспринимать как матрицу с мультииндексами h и $\{ik\}$. При этом можно считать, что h пробегает не все десять, а только шесть значений вследствие выполнения четырех тождественных соотношений (19), а мультииндекс $\{ik\}$ также пробегает шесть значений вследствие симметричности величины b^h_{ik}. Таким образом, величина b^h_{ik} может рассматриваться как квадратная матрица размера 6×6. Предположим дополнительно, что эта матрица является неособой во всех точках начальной поверхности, что можно условно записать как

$$\det b^h_{ik}\neq 0. \tag{49}$$

Это предположение носит технический характер, оно всего лишь исключает некоторое множество начальных данных, имеющее меру ноль. Некоторое обсуждение условия (49) приведено в работе [6]. В частности, там показано, что нарушение этого условия является особой ситуацией для записанных в терминах функции вложения уравнений Эйнштейна.

Если матрица b^h_{ik} неособая, то уравнение (48) эквивалентно уравнению

$$G^{ab}\,{}^3e^i_a\,{}^3e^k_b=0, \tag{50}$$

которое вместе с наложенными связями (42) можно записать в виде уравнений Эйнштейна

$$G^{\mu\nu}=0. \tag{51}$$

Таким образом, мы получаем первый результат: уравнения теории вложения, дополненные наложенными в некоторый момент времени связями (42) и условием (49), приводят к выполнению уравнений Эйнштейна в этот момент времени.

В работе [6] показано, что с помощью тождества Бьянки можно получить соотношение для производной по времени от связей (42):

$$\partial_0(n_aG^{ac})=-\frac{1}{\sqrt{g^{00}}}\,\Pi^c_b\,e^i_a\,\partial_iG^{ab}-n_aG^{ab}\,\partial_0\Pi_{\perp}{}^c_b+G^{ac}\partial_0n_a. \tag{52}$$

Из этого соотношения легко получить второй результат: если в некоторый момент времени выполняются уравнения Эйнштейна (51), то производная по времени от связей (42) оказывается в этот момент времени равной нулю.

Вместе с найденным выше первым результатом сказанное позволяет заключить, что если всегда выполняются уравнения теории вложения, в течение некоторого промежутка времени выполняется условие (49) и в начальный момент данного промежутка наложены эйнштейновские связи (42), то в течение этого промежутка времени выполняются уравнения Эйнштейна. Поскольку, в частности, эйнштейновские связи, будучи наложены в начальный момент, выполняются далее автоматически, то можно ожидать, что в рамках канонического формализма эти связи окажутся связями первого рода.

Таким образом, если начальные данные выбираются соответствующими ситуации общего положения, а значит, выполняется условие (49), то теория вложения с наложенными в начальный момент времени эйнштейновскими связями оказывается эквивалентной ОТО.

4. КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ НАЛОЖЕНИЕМ ЭЙНШТЕЙНОВСКИХ СВЯЗЕЙ

Разовьем канонический формализм для теории вложения. Отбрасывая полную дивергенцию в подынтегральном выражении действия (3), запишем его в форме Арновитта–Дезера–Мизнера:

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-g}\big((K_i^i)^2 - K_{ik}K^{ik} + \overset{3}{R}\big). \tag{53}$$

Если переписать это выражение в терминах функции вложения $y^a(x)$ и воспользоваться одним из видов формулы (40), то оно примет форму

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-g}\big(n_a n_b \overset{3}{b}{}^a_{ik}\overset{3}{b}{}^b_{lm}L^{ik,lm} + \overset{3}{R}\big), \tag{54}$$

где

$$L^{ik,lm} = \overset{3}{g}{}^{ik}\overset{3}{g}{}^{lm} - \overset{3}{g}{}^{il}\overset{3}{g}{}^{km}. \tag{55}$$

Заметим, что из формулы (38) можно получить равенство

$$g^{00} = \frac{1}{\dot{y}^a\overset{3}{\Pi}_{\perp ab}\dot{y}^b}, \tag{56}$$

где $\dot{y}^a \equiv \partial_0 y^a$. Используя соотношение $g = \overset{3}{g}/g^{00}$ и формулы (23), (38), (56), действие (54) можно записать в форме, в которой производные по времени x^0 от переменных $y^a(x)$ выписаны явно:

$$S = \int dx^0\,L(y^a,\dot{y}^a), \qquad L = \int d^3x\,\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{y}^a\,B_{ab}\dot{y}^b}{\sqrt{\dot{y}^a\overset{3}{\Pi}_{\perp ab}\dot{y}^b}} + \sqrt{\dot{y}^a\overset{3}{\Pi}_{\perp ab}\dot{y}^b}\,B^c_c\right), \tag{57}$$

где величина

$$B^{ab} = 2\sqrt{-\overset{3}{g}}\,\overset{3}{b}{}^a_{ik}\,\overset{3}{b}{}^b_{lm}\,L^{ik,lm}, \tag{58}$$

равно как и проектор $\overset{3}{\Pi}_{\perp ab}$, не содержит производных по времени.

Величина $\overset{3}{b}{}^a_{ik}$ может рассматриваться как набор шести векторов (при фиксированных значениях индексов i, k, по которым она симметрична). С другой стороны, эта величина удовлетворяет трем тождествам $\overset{3}{b}{}^a_{ik}\overset{3}{e}_{a,l} = 0$. Поэтому в ситуации общего положения существует единственный нормированный вектор w_a, определяемый условиями

$$w_a \overset{3}{e}{}^a_l = 0, \qquad w_a \overset{3}{b}{}^a_{ik} = 0. \tag{59}$$

Отметим, что действие на этот вектор матрицы B^{ab} дает ноль, а значит, она не является обратимой матрицей даже в семимерном подпространстве, ортогональном векторам $\overset{3}{e}{}^a_i$. Этот факт не был замечен в работе [5], что привело к неверной записи одной из связей.

Найдем обобщенный импульс π_a для переменной y^a из действия (57) (используем формулы (38), (56)):

$$\pi_a = \frac{\delta L}{\delta \dot{y}^a} = B_{ab}n^b - \frac{1}{2}n_a(n_c B^{cd} n_d - B^c_c). \tag{60}$$

Учитывая свойства величины $\overset{3}{b}{}^a_{ik}$, получаем связи

$$\Phi_i = \pi_a \overset{3}{e}{}^a_i = 0. \tag{61}$$

В ситуации общего положения из соотношения (60) должна возникать еще одна связь, появляющаяся как ограничение на импульс π_a, следующее из тождества $n^a n_a = 1$. Отметим, что такую связь чрезвычайно сложно записать в виде некоторого алгебраического выражения (этот вопрос исследовался в работе [10]). Однако вместо рассмотрения ситуации общего положения мы будем считать, что при построении канонического формализма дополнительно налагаются эйнштейновские связи (42). Используя формулы (23), (43), (46), (58), запишем эти связи в виде

$$\mathcal{H}^i = -2\sqrt{-\overset{3}{g}}\overset{3}{\nabla}_k\big(L^{ik,lm}\overset{3}{b}{}^a_{lm}n_a\big) = 0, \tag{62}$$

$$\mathcal{H}^0 = n_c B^{cd} n_d - B^c_c = 0, \tag{63}$$

где общие множители выбраны из соображений удобства. Если учесть связь (63) в выражении для импульса (60), то оно принимает вид

$$\pi_a = B_{ab}n^b. \tag{64}$$

В результате тождество $n^a n_a = 1$ уже не приводит к ограничениям на импульс π_a (поскольку, как отмечалось выше, матрица B_{ab} не является обратимой, даже в подпространстве, ортогональном векторам $\overset{3}{e}{}^a_i$), а вместо этого в добавление к связи (61) возникает связь

$$\Phi_0 = \pi_a w^a = 0. \tag{65}$$

Используя формулы (38), (56), (57), (60), легко найти, что гамильтониан теории

$$H = \int d^3x\, \pi_a \dot{y}^a - L \tag{66}$$

оказывается равным нулю. Поэтому обобщенный гамильтониан сводится к линейной комбинации связей (61)–(63), (65), и необходимо проверить, образуют ли они алгебру связей первого рода.

В каноническом формализме связи должны быть выражены через обобщенные координаты и импульсы, т.е. в данном случае через y^a и π_a, но не через $\dot{y}^a$. Связи (61) и (65) удовлетворяют этому требованию (отметим, что определяемый условиями (59) вектор w_a зависит от y^a, но не от $\dot{y}^a$), а (62) и (63) – нет. Приведем их к необходимому виду. Для этого введем величину α_a^{ik}, однозначно определяемую условиями

$$\alpha_a^{ik} = \alpha_a^{ki}, \qquad \alpha_a^{ik} \overset{3}{e}{}_l^a = 0, \qquad \alpha_a^{ik} w^a = 0, \qquad \alpha_a^{ik} \overset{3}{b}{}_{lm}^a = \frac{1}{2}(\delta_l^i \delta_m^k + \delta_m^i \delta_l^k). \tag{67}$$

Понятно, что эта величина, как и w_a, зависит от y^a, но не от $\dot{y}^a$. Из соотношения (64) можно заключить, что

$$\overset{3}{b}{}_{ik}^b n_b = \frac{1}{2\sqrt{-\overset{3}{g}}} \hat{L}_{ik,lm} \alpha_a^{lm} \pi^a, \tag{68}$$

где

$$\hat{L}_{pr,lm} = \frac{1}{2} g_{pr} g_{lm} - g_{pl} g_{rm}, \qquad \hat{L}_{pr,lm} L^{ik,lm} = \delta_p^i\, \delta_r^k. \tag{69}$$

Используя формулу (68), связи (62), (63) можно записать как

$$\mathcal{H}^i = -\sqrt{-\overset{3}{g}} \overset{3}{\nabla}_k \left(\frac{1}{\sqrt{-\overset{3}{g}}} \pi^a \alpha_a^{ik} \right), \tag{70}$$

$$\mathcal{H}^0 = \frac{1}{2\sqrt{-\overset{3}{g}}} \pi^a \alpha_a^{ik} \hat{L}_{ik,lm} \alpha_b^{lm} \pi^b - 2\sqrt{-\overset{3}{g}} \overset{3}{R}. \tag{71}$$

В такой форме связи перестают содержать $\dot{y}^a$. Видно, что связь (71) представляет собой квадратичное выражение по импульсу π^a, а связь (70), равно как и связи (61), (65), – линейное.

Отметим, что найденный набор связей (61), (65), (70), (71) отличается от приведенного в работе [5] – иначе выглядит связь (65) (см. замечание после формулы (59)).

Теперь необходимо вычислить скобки Пуассона найденных связей (61), (65), (70), (71) между собой. Поскольку, как было показано в разделе 3, эйнштейновские связи имеют свойство сохраняться вследствие уравнений движения, можно надеяться, что эти скобки Пуассона будут сводиться к линейным комбинациям связей, т.е. возникнет алгебра связей первого рода. Однако это требует непосредственной проверки.

Полезно найти результат действия преобразований, генераторами которых являются связи (61), (65), (70), на некоторые комбинации переменных. Вычисление показывает, что

$$\left\{\int d^3\tilde{x}\,\underset{\sim}{\Phi}_i\underset{\sim}{\xi}^i, y^a\right\} = \xi^i\partial_i y^a, \qquad \left\{\int d^3\tilde{x}\,\underset{\sim}{\Phi}_i\underset{\sim}{\xi}^i, \frac{\pi_a}{\sqrt{-\overset{3}{g}}}\right\} = \xi^i\partial_i\frac{\pi_a}{\sqrt{-\overset{3}{g}}}, \tag{72}$$

$$\left\{\int d^3\tilde{x}\,\underset{\sim}{\Phi}_0\underset{\sim}{\xi}, \overset{3}{g}_{lm}\right\} = 0, \qquad \left\{\int d^3\tilde{x}\,\underset{\sim}{\Phi}_0\underset{\sim}{\xi}, \pi^a\alpha_a^{lm}\right\} \approx 0, \tag{73}$$

$$\left\{\int d^3\tilde{x}\,(\underset{\sim}{\mathcal{H}}_i + \underset{\sim}{\Phi}_i)\underset{\sim}{\xi}^i, \overset{3}{g}_{lm}\right\} = 0, \qquad \left\{\int d^3\tilde{x}\,(\underset{\sim}{\mathcal{H}}_i + \underset{\sim}{\Phi}_i)\underset{\sim}{\xi}^i, \pi^a\alpha_a^{lm}\right\} \approx 0, \tag{74}$$

где $\mathcal{H}_i = \overset{3}{g}_{ik}\mathcal{H}^k$, ξ, ξ^i – произвольные, зависящие от x^k, бесконечно малые величины, $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ – скобки Пуассона, знак $\approx$ означает равенство с точностью до добавления линейной комбинации связей и использовано обозначение $f \equiv f(x)$, $\underset{\sim}{f} \equiv f(\tilde{x})$.

Из формул (72) следует, что связь Φ_k генерирует преобразования трехмерных координат на поверхности постоянного времени W^3 (следует отметить, что обобщенный импульс π^a является трехмерной скалярной плотностью). Поскольку связи Φ_0 и $\mathcal{H}^0$ являются скалярными плотностями, а Φ_i и $\mathcal{H}^i$ – векторными плотностями, это означает, что скобка Пуассона связи Φ_i со всеми связями сводится к линейной комбинации связей.

Первая из формул (73) говорит о том, что связь Φ_0 генерирует преобразование, являющееся изометрическим изгибанием поверхности W^3. Поскольку связи $\mathcal{H}^i$ и $\mathcal{H}^0$ выражаются через величины $\overset{3}{g}_{lm}$ и $\pi^a\alpha_a^{lm}$, из формул (73) следует, что скобка Пуассона связи Φ_0 со связями $\mathcal{H}^i$ и $\mathcal{H}^0$ сводится к линейной комбинации связей.

Аналогично, формулы (74) показывают, что комбинация связей $\mathcal{H}_i + \Phi_i$ также генерирует изометрические изгибания поверхности W^3 и что ее скобка Пуассона со связями $\mathcal{H}^i$ и $\mathcal{H}^0$ сводится к линейной комбинации связей. Отметим, что общее число обнаруженных генераторов трехмерных изометрических изгибаний (четыре) соответствует сравнению числа независимых компонент трехмерной метрики (шесть) и размерности пространства, в которое вложена в данном случае трехмерная поверхность (десять).

Учитывая сказанное, для того чтобы доказать замыкание алгебры связей (61), (65), (70), (71), остается проверить равенство нулю только двух скобок Пуассона: $\{\underset{\sim}{\Phi}_0, \Phi_0\}$ и $\{\underset{\sim}{\mathcal{H}}^0, \mathcal{H}^0\}$. Это удается сделать прямым вычислением, которое, особенно в случае скобки Пуассона $\{\underset{\sim}{\mathcal{H}}^0, \mathcal{H}^0\}$, оказывается весьма громоздким. Таким образом, удается доказать, что связи (61), (65), (70), (71) являются связями первого рода.

В соответствии со сказанным после формулы (65) можно записать гамильтониан теории вложения с дополнительно наложенными эйнштейновскими связями в виде линейной комбинации всех восьми связей с множителями Лагранжа:

$$H = \int d^3x\,(\lambda^i\Phi_i + \lambda^0\Phi_0 + N_i\mathcal{H}^i + N_0\mathcal{H}^0). \tag{75}$$

Однако поскольку четыре из восьми связей не возникли при построении канонического формализма, а были наложены искусственно и добавлены к гамильтониану со своими множителями Лагранжа, порождаемые этим гамильтонианом уравнения движения могут не воспроизводить в точности исходные уравнения теории вложения, а содержать в качестве дополнительных переменных некоторые из множителей Лагранжа.

Наличие восьми связей первого рода означает присутствие в теории восьмипараметрической калибровочной симметрии, в то время как в исходной теории вложения есть только четырехпараметрическая калибровочная группа, соответствующая замене координат на поверхности W^4. Это означает, что дополнительные преобразования симметрии должны затрагивать дополнительные переменные – множители Лагранжа.

Можно предположить, что при некотором способе фиксации возникшего дополнительного калибровочного произвола, т.е. при наложении некоторых условий на появившиеся в уравнениях движения множители Лагранжа, эти уравнения совпадут с уравнениями теории вложения, а значит, с учетом выполнения связей, и с уравнениями Эйнштейна. В следующем разделе будет показано, что это действительно так.

Интересно отметить, что, как показывает несложное вычисление, величина

$$\pi^{lm} = -\frac{1}{2}\pi^a \alpha_a^{lm} \tag{76}$$

оказывается канонически сопряжена трехмерной метрике $\overset{3}{g}_{ik}$. Если бы мы ограничились только рассмотрением динамики величин, составленных из $\overset{3}{g}_{ik}$ и π^{lm}, то, учитывая формулы (73), (74), в гамильтониане (75) можно было бы вычеркнуть слагаемое, пропорциональное Φ_0, а Φ_i заменить на $-\mathcal{H}_i$. В результате этого гамильтониан принял бы вид

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left((N_i - \lambda_i)\mathcal{H}^i + N_0\mathcal{H}^0\right) = \\ &= \int d^3x \left(2(N_i - \lambda_i)\sqrt{-\overset{3}{g}}\overset{3}{\nabla}_k \left(\frac{\pi^{ik}}{\sqrt{-\overset{3}{g}}}\right) + 2N_0 \left(\frac{\pi^{ik}\hat{L}_{ik,lm}\pi^{lm}}{\sqrt{-\overset{3}{g}}} - \sqrt{-\overset{3}{g}}\overset{3}{R}\right)\right), \end{aligned} \tag{77}$$

в котором он сводится к комбинации только четырех связей вместо восьми и в точности совпадает с известным выражением для гамильтониана в формализме Арновитта–Дезера–Мизнера.

5. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ С ВВЕДЕННЫМИ ДОПОЛНИТЕЛЬНО ЭЙНШТЕЙНОВСКИМИ СВЯЗЯМИ

Построим действие, соответствующее гамильтониану (75). Для этого вычислим величину $\dot{y}^a$:

$$\dot{y}^a = \frac{\delta H}{\delta \pi_a} = \lambda^i \overset{3}{e}{}_i^a + \lambda^0 w^a + \alpha^{a,ik}\overset{3}{\nabla}_i N_k + \frac{N_0}{\sqrt{-\overset{3}{g}}}\alpha^{a,ik}\hat{L}_{ik,lm}\alpha_b^{lm}\pi^b. \tag{78}$$

Сворачивая это равенство с величиной $\overset{3}{b}_{a,pr}$ и используя ее свойства и формулы (67), (69), можно найти соотношение

$$\pi^a \alpha_a^{ik} = \frac{\sqrt{-\overset{3}{g}}}{N_0} L^{ik,lm} \left(\dot{y}_a \overset{3}{b}{}^a_{ik} - \frac{1}{2} \left(\overset{3}{\nabla}_i N_k + \overset{3}{\nabla}_k N_i \right) \right). \tag{79}$$

Подставляя соотношения (78) и (79) в формулу, связывающую лагранжиан и гамильтониан теории, несложно получить выражение для искомого действия:

$$\begin{aligned} S &= \int dx^0 \left(\int d^3x \, \pi_a \dot{y}^a - H \right) = \\ &= \int d^4x \left(\frac{N_0}{2\sqrt{-\overset{3}{g}}} \pi^a \alpha_a^{ik} \hat{L}_{ik,lm} \alpha_b^{lm} \pi^b + 2N_0 \sqrt{-\overset{3}{g}} \overset{3}{R} \right) = \\ &= \int d^4x \sqrt{-\overset{3}{g}} \left[\frac{1}{2N_0} \left(\dot{y}_a \overset{3}{b}{}^a_{ik} - \frac{\overset{3}{\nabla}_i N_k + \overset{3}{\nabla}_k N_i}{2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times L^{ik,lm} \left(\dot{y}_b \overset{3}{b}{}^b_{lm} - \frac{\overset{3}{\nabla}_l N_m + \overset{3}{\nabla}_m N_l}{2} \right) + 2N_0 \overset{3}{R} \right]. \end{aligned} \tag{80}$$

Видно, что в это действие вместе с исходными переменными теории y^a вошли в качестве дополнительных независимых переменных множители Лагранжа N_i и N_0. Следовательно, они войдут и в полученные из действия (80) уравнения движения. Это приводит к тому, что такие уравнения движения не воспроизводят в точности исходные уравнения теории вложения (5).

Соответствующие действию (80) уравнения движения не налагают никаких ограничений на развитие во времени переменных N_i, N_0, поскольку они являются множителями Лагранжа. Эти переменные могут быть приведены к любым значениям с помощью дополнительных калибровочных преобразований, о которых говорилось выше.

Сравнивая выражение (80) с исходным действием (57), легко видеть, что они совпадут, если наложить на множители Лагранжа N_i, N_0 условия

$$N_i = 0, \qquad N_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\dot{y}^a \overset{3}{\Pi}_{\perp ab} \dot{y}^b} = \frac{1}{2\sqrt{g^{00}}} \tag{81}$$

(использовано равенство (56)). Это означает, что если в полученных из действия (80) уравнениях движения в качестве частичной фиксации калибровки потребовать выполнения условий (81), то эти уравнения превратятся в уравнения теории вложения (5), дополненные эйнштейновскими связями (последние возникнут в результате варьирования действия по переменным N_i, N_0). Как было показано выше, если начальные данные находятся в ситуации общего положения, то такая совокупность уравнений оказывается эквивалентна уравнениям Эйнштейна.

Таким образом, можно сказать, что теория, эквивалентная ОТО Эйнштейна, может быть получена как результат частичной фиксации калибровки в обладающей восьмипараметрической калибровочной симметрией обобщенной теории вложения с действием (80).

Интересно отметить, что действие (80) с точностью до внеинтегральных членов может быть записано в виде исходного действия ОТО

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-g'}\,R(g'), \tag{82}$$

если в него в качестве метрики $g'_{\mu\nu}$ подставить не индуцированное выражение (4), а его следующую модификацию:

$$g'_{ik} = \overset{3}{g}_{ik} = \partial_i y^a\,\partial_k y_a, \qquad g'_{0k} = \partial_0 y^a\,\partial_k y_a - N_k, \qquad g'_{00} = 4N_0^2 + g'_{0i}\overset{3}{g}{}^{ik} g'_{0k}, \tag{83}$$

откуда следует, что $g'^{00} = 1/(4N_0^2)$. Для того чтобы это увидеть, нужно действие (82) переписать в форме (53), заменяя $g_{\mu\nu}$ на $g'_{\mu\nu}$ и применяя формулу $g' = \overset{3}{g}{}'/g'^{00}$:

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-\overset{3}{g}{}'}\left[\frac{1}{\sqrt{g'^{00}}}K_{ik}(g')L^{ik,lm}(g')K_{lm}(g') + \frac{1}{\sqrt{g'^{00}}}\overset{3}{R}(g')\right]. \tag{84}$$

Используя известное соотношение

$$K_{ik} = \frac{\sqrt{g^{00}}}{2}\left(-\partial_0 g_{ik} + \overset{3}{\nabla}_i g_{0k} + \overset{3}{\nabla}_k g_{0i}\right), \tag{85}$$

формулы (83) и следующее из формул (38), (40) равенство

$$K_{ik} = \sqrt{g^{00}}\dot{y}_a \overset{3}{b}{}^a_{ik}, \tag{86}$$

можно заметить, что

$$K_{ik}(g') = \frac{1}{2N_0}\left(\dot{y}_a \overset{3}{b}{}^a_{ik} - \frac{\overset{3}{\nabla}_i N_k + \overset{3}{\nabla}_k N_i}{2}\right). \tag{87}$$

Подставляя это выражение в (84) и учитывая формулы (83) и тот факт, что $L^{ik,lm}(g') = L^{ik,lm}(g)$, $\overset{3}{R}(g') = \overset{3}{R}(g)$ (где g – индуцированная метрика), несложно увидеть, что результат совпадает с формулой (80).

Как уже говорилось выше, рассматриваемая теория с независимыми переменными y^a, N_i, N_0, действие которой можно записать в виде (82), обладает восьмипараметрической калибровочной симметрией. Видно, что величина $g'_{\mu\nu}$ оказывается инвариантом относительно четырех из этих восьми преобразований, генераторами которых в каноническом формализме являются связь Φ_0 и комбинация связей $\mathcal{H}_i + \Phi_i$. Это преобразования, являющиеся изометрическими изгибаниями поверхностей постоянного времени W^3 (см. формулы (73), (74) и текст после них), дополненными

соответствующими преобразованиями переменных N_i, N_0. Можно также показать, что при оставшихся четырех преобразованиях величина $g'_{\mu\nu}$ преобразуется как тензор, что и приводит к неизменности действия (82) при этих преобразованиях.

При наложении калибровочных условий (81) величина $g'_{\mu\nu}$ совпадает с индуцированной метрикой. Как следствие, в этой калибровке она удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (это верно, если начальные данные находятся в ситуации общего положения, см. выше). Но поскольку эта величина не изменяется при преобразованиях, с помощью которых произвольные значения переменных приводятся к калибровке (81), она удовлетворяет уравнениям Эйнштейна и в том случае, когда калибровочные условия (81) не налагаются. Поэтому, в принципе, величину $g'_{\mu\nu}$ можно считать инвариантным относительно дополнительных преобразований симметрии определением метрики, совпадающим с индуцированной метрикой только в калибровке (81).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства образования России (грант № РНП.2.1.1.1112) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5538.2006.2). Работа С. А. Пастона также поддержана РФФИ (грант № 05-02-17477).

Список литературы

[1] M. Janet, *Ann. Soc. Pol. Math.*, **5** (1926), 38.
[2] E. Cartan, *Ann. Soc. Pol. Math.*, **6** (1927), 1.
[3] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, 2, Наука, М., 1981.
[4] A. Friedman, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 625.
[5] T. Regge, C. Teitelboim, "General relativity a la string: a progress report", *Proceedings of the First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* (Trieste, Italy, 1975), ed. R. Ruffini, North-Holland, Amsterdam, 1977, 77.
[6] S. A. Paston, V. A. Franke, "The gravity as a theory of embedding of space-time into the flat space of higher demensions", *Proceedings of the* XV *Int. V. A. Fock School for Advances of Physics* 2005, ed. V. Yu. Novozhilov, Publ. St. Petersburg State Univ., St. Petersburg, 2006, 34.
[7] S. Deser, F. A. E. Pirani, D. C. Robinson, *Phys. Rev. D*, **14** (1976), 3301.
[8] V. Tapia, *Class. Quantum Grav.*, **6** (1989), L49.
[9] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, "The dynamics of general relativity", *Gravitation: an Introduction to Current Research*, ch. 7, ed. L. Witten, Wiley, New York, 1962, 227; gr-qc/0405109.
[10] V. A. Franke, V. Tapia, *Nuovo Cimento B* (11), **107**:6 (1992), 611.
[11] M. Pavsic, V. Tapia, *Resource letter on geometrical results for embeddings and branes*, gr-qc/0010045.

Поступила в редакцию 20.12.2006