ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 112, № 3
сентябрь, 1997

 С. А. Пастон*, В. А. Франке†

СРАВНЕНИЕ КВАНТОВО-ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА СВЕТОВОМ ФРОНТЕ И В ЛОРЕНЦЕВЫХ КООРДИНАТАХ

Исследуется взаимосвязь между теорией возмущений в координатах светового фронта и лоренц-ковариантной теорией возмущений. Предложен способ, позволяющий находить разницу между отдельными членами соответствующих рядов без их полного вычисления. На этой основе разработана процедура построения дополнительных контрчленов к каноническому гамильтониану на световом фронте, устраняющих эту разницу в любом конечном порядке. В случае модели Юкавы удается получить этим путем гамильтониан на световом фронте со всеми такими контрчленами в замкнутом виде. Обсуждается возможность применения данного подхода к калибровочным теориям.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гамильтонов подход к квантовой теории поля в координатах светового фронта (СФ) $x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 \pm x_3)$, $x^\perp = \{x^1, x^2\}$ привлекает к себе внимание как возможный способ решения задач сильного взаимодействия. Формальная тривиальность физического вакуума при таком подходе позволяет разыскивать связанные состояния, не исследуя предварительно сложной структуры вакуума. Однако, как теперь известно, каноническое квантование на СФ, т.е. на гиперповерхности $x^+ = \mathrm{const}$, может порождать теорию, не вполне эквивалентную лоренц-ковариантной (т.е. обычному фейнмановскому формализму). Это обусловлено, в первую очередь, сильными сингулярностями, возникающими при нулевых значениях "светоподобных" импульсных переменных $Q_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0 - Q_3)$. Чтобы восстановить соответствие с лоренц-ковариантной теорией, приходится добавлять к формальному каноническому гамильтониану на СФ $H = P_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(P_0 + P_3)$ (оператору сдвига вдоль оси x^+) необычные контрчлены. Находить эти контрчлены можно, сравнивая теорию возмущений, построенную с помощью канонического формализма на СФ, с лоренц-ковариантной теорией возмущений, что и делается в настоящей работе. Полученный таким путем гамильтониан на СФ можно затем применять для непертурбативных расчетов. Не исключено,

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
†Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург, Россия

разумеется, что теория возмущений не дает всех нужных добавок к каноническому гамильтониану. Часть этих добавок может носить непертурбативный характер. Однако рассмотрение этого вопроса в рамках теории возмущений представляется необходимым шагом.

Для практических целей большей частью используется нековариантная стационарная теория возмущений на СФ, аналогичная применяемой в нерелятивистской квантовой механике. Установлено [1–3], что с помощью "светоподобного" формализма типа дайсоновского ее можно превратить в эквивалентную светоподобную теорию фейнмановского типа (при соответствующей регуляризации), а затем путем пересуммирования подынтегральных выражений интегралов Фейнмана придать этим выражениям такой же вид, как в лоренц-ковариантной теории (это не так лишь для диаграмм без внешних линий, которые мы не рассматриваем). Тогда различие между светоподобным и лоренц-ковариантным подходами сохраняется только из-за разной регуляризации и разного способа вычисления интегралов Фейнмана (что нетривиально из-за возможного отсутствия абсолютной сходимости их в псевдоевклидовом пространстве). В настоящей работе внимание сконцентрировано на анализе этого различия.

Светоподобная теория нуждается не только в обычной УФ-регуляризации, но и в специальной регуляризации особенностей при $Q_- = 0$. Мы проводим такую регуляризацию, исключая операторы рождения $a^+(Q)$ и уничтожения $a(Q)$ с $|Q^i_-| < \varepsilon$ из фурье-разложения операторов поля в представлении взаимодействия. Вследствие этого каждой линии до снятия δ-функций отвечает интегрирование по соответствующему импульсу Q_- в пределах $(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$. Разные пропагаторы регуляризуются независимо, благодаря чему может быть осуществима описанная перестройка рядов теории возмущений. В то же время такая регуляризация удобна для последующих непертурбативных численных расчетов с использованием светоподобного гамильтониана, дополненного необходимыми контрчленами ("эффективного" гамильтониана). Мы требуем, чтобы в пределе снятия регуляризации этот гамильтониан порождал теорию, эквивалентную лоренц-ковариантной. Заметим, что лоренц-инвариантные способы регуляризации (например, типа Паули–Вилларса) значительно менее удобны для численных расчетов. Мы лишь кратко их упоминаем.

Специфика светоподобного фейнмановского формализма сказывается лишь при интегрировании по переменным $Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0 \pm Q_3)$. Интегрирование же по поперечным импульсам $Q_\perp \equiv \{Q_1, Q_2\}$ производится в светоподобных и лоренцевых координатах одинаковым образом (хотя оно может быть нетривиальным, т.к. требует регуляризации и перенормировки). Поэтому мы в основном сосредоточимся на сравнении диаграмм при фиксированных поперечных импульсах (что эквивалентно двумерной задаче).

В работе предлагается способ, позволяющий находить разницу (в пределе $\varepsilon \to 0$) между любым светоподобным интегралом Фейнмана и соответствующим лоренц-ковариантным интегралом, не вычисляя их полностью. На его основе разработана процедура построения эффективного гамильтониана на СФ в любом порядке теории возмущений. Она применима ко всем некалибровочным теориям поля, а также к абелевым и неабелевым калибровочным теориям в калибровке $A_- = 0$ при выборе пропагатора векторного мезона по Мандельстаму–Лейббрандту [4, 5]. Вопрос о том, можно ли объединить возникающие добавки к гамильтониану в конечное число контрчленов, должен решаться отдельно в каждом конкретном случае.

Применение данного формализма к модели Юкавы позволило получить эффективный гамильтониан на СФ в замкнутом виде. Результат согласуется с выводами, сделанными в работе [1], где сравнивались светоподобный и лоренц-ковариантный расчеты диаграмм собственной энергии во всех порядках теории возмущений и прочих диаграмм в низших порядках. Напротив, в случае калибровочных теорий (как абелевых, так и неабелевых) выяснилось, что в эффективный гамильтониан необходимо включить контрчлены сколь угодно высокой степени по операторам поля. Этот результат может оказаться неверным, если произойдет взаимная компенсация вкладов в контрчлены, что требует дальнейшего исследования, но представляется маловероятным. Сказанное не обесценивает "светоподобного" формализма в применении к калибровочным теориям, поскольку от гамильтониана на СФ совершенно необходимо требовать лишь, чтобы он правильно воспроизводил все калибровочно-инвариантные величины, а не интегралы Фейнмана вне поверхности масс в заданной калибровке. Однако перенормировка гамильтониана на СФ оказывается весьма трудной задачей, требующей новых подходов. Мы не рассматриваем возможности изменить гамильтониан на СФ путем введения новых нефизических полей способом, отличным от регуляризации Паули–Вилларса [6], а также возможности применить калибровки, более общие чем $A_- = 0$ с пропагатором Мандельстама–Лейббрандта. Эти вопросы нуждаются в дальнейшем исследовании.

2. ПРИВЕДЕНИЕ СВЕТОПОДОБНОГО И ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОГО ИНТЕГРАЛОВ ФЕЙНМАНА К УДОБНОМУ ДЛЯ СРАВНЕНИЯ ВИДУ

Рассмотрим произвольную 1-неприводимую диаграмму Фейнмана. Все внешние импульсы и все поперечные импульсы интегрирования считаем фиксированными. Интегрирование ведем только по Q_+ и Q_-:

$$F = \lim_{\varkappa \to 0} \int \frac{\prod_i d^2Q^i \, f(Q^i, p^k)}{\prod_i (2Q^i_+ Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa)}. \tag{1}$$

Считаем, что вершины полиномиальны, а пропагатор имеет вид

$$\frac{z(Q)}{Q^2 - m^2 + i\varkappa} \quad \text{или} \quad \frac{z(Q)\, Q_+}{(Q^2 - m^2 + i\varkappa)(2Q_+Q_- + i\varkappa)}, \tag{2}$$

где $z(Q)$ – полином. Пропагатор второго типа возникает в калибровочных теориях в калибровке $A_- = 0$ при использовании формализма Мандельстама–Лейббрандта [4, 5]. В выражении (1) либо $M_i^2 = m_i^2 + {Q^i_\perp}^2 \neq 0$, где m_i – масса частицы, либо $M_i^2 = 0$. Функция f содержит числители всех пропагаторов и все вершины с необходимыми δ-функциями, включающими внешние импульсы p^k (то же выражение без δ-функций, являющееся полиномом, обозначаем через $\tilde{f}$). Считаем, что для диаграммы F и для любой ее поддиаграммы выполнены условия

$$\omega_{\|} < 0, \qquad \omega_+ < 0, \tag{3}$$

где ω_+ – индекс расходимости по Q_+ при $Q^i_- \neq 0 \quad \forall i$, а $\omega_{\|}$ – индекс расходимости по Q_+ и Q_- (совместно); $Q_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_0 \pm Q_3)$. Не удовлетворяющие этому условию диаграммы нужно рассматривать отдельно для конкретной теории (обычно их конечное число). Будем искать разницу между значением интеграла (1) при лоренц-ковариантном расчете и его значением при вычислении в координатах СФ ("светоподобном" расчете).

При светоподобном расчете вводится, а затем снимается светоподобное обрезание $|Q_-| \geqslant \varepsilon > 0$:

$$F_{\text{св}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\varkappa\to 0}\int_{V_\varepsilon}\prod_i dQ^i_- \int\prod_i dQ^i_+ \,\frac{f(Q^i,p^k)}{\prod_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa)},$$

где $V_\varepsilon = \prod_i\big((-\infty,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,\infty)\big)$. Здесь (а также в конфигурациях диаграммы, определения которых появятся ниже) берется предел по ε, но, вообще говоря, данный предел может не существовать. В этом случае будем считать, что берется не предел, а сумма всех членов неположительной степени ряда Лорана по ε в точке нуль. При выполнении условий (3) можно применить утверждение 2 из приложения 1.Тогда возникнет равенство

$$F_{\text{св}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\varkappa\to 0}\int\prod_k dq^k_+ \int_{V_\varepsilon\cap B_L}\prod_k dq^k_- \,\frac{\tilde f(Q^i,p^s)}{\prod_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa)}. \qquad (4)$$

Здесь и далее импульсы линий Q^i предполагаются выраженными через петлевые импульсы q^k, B_L – шар радиуса L, причем величина L зависит от внешних импульсов. Теперь, применяя утверждение 1 из приложения 1, получим

$$F_{\text{св}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\varkappa\to 0}\lim_{\beta\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\int\prod_k dq^k_+ \int_{V_\varepsilon}\prod_k dq^k_- \,\frac{\tilde f(Q^i,p^s)\, e^{-\gamma\sum_i {Q^i_+}^2 - \beta\sum_i {Q^i_-}^2}}{\prod_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa)}. \qquad (5)$$

Чтобы привести ковариантный интеграл Фейнмана к виду, аналогичному (4), введем величину $\widehat F$:

$$\widehat F = \lim_{\varkappa\to 0}\lim_{\beta\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\int\prod_k d^2q^k\,\frac{\tilde f(Q^i,p^s)\, e^{-\gamma\sum_i {Q^i_+}^2 - \beta\sum_i {Q^i_-}^2}}{\prod_i(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa)}. \qquad (6)$$

Докажем, что эта величина совпадает с результатом лоренц-ковариантного расчета $F_{\text{ков}}$. Для этого введем α-представление в пространстве Минковского для пропагатора

$$\frac{z(Q^i)}{2Q^i_+Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa} = -iz\Big(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)\int_0^\infty \exp\Big\{i\alpha_i\big(2Q^i_+Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa\big) + \\ + i\big(Q^i_+ y_i^+ + Q^i_- y_i^-\big)\Big\}\, d\alpha_i\Big|_{y_i=0}. \qquad (7)$$

Подставим (7) в (6). Из-за наличия режущих экспонент по q^k_+, q^k_- и α^i интеграл по этим переменным сходится абсолютно, так что можно переставить интегрирования по q^k_+, q^k_- и по α^i. В результате получим равенство

$$\widehat F = \lim_{\varkappa\to 0}\lim_{\beta\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\int_0^\infty\prod_n d\alpha_i\,\widehat\varphi(\alpha_i,p^s,\gamma,\beta)\, e^{-\varkappa\sum_i\alpha_i}, \qquad (8)$$

где

$$\widehat{\varphi}(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta) = (-i)^n \tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \int \prod_k d^2q^k \exp\left\{\sum_i \left[i\alpha_i (2Q^i_+ Q^i_- - M_i^2) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + i(Q^i_+ y_i^+ + Q^i_- y_i^-) - \gamma {Q^i_+}^2 - \beta {Q^i_-}^2\right]\right\}\right|_{y_i=0}. \qquad (9)$$

Для лоренц-ковариантного расчета в α-представлении при выполнении условий (3) известно выражение [7]

$$F_{\text{ков}} = \lim_{\varkappa \to 0} \int_0^\infty \prod_n d\alpha_i \, \varphi_{\text{ков}}(\alpha_i, p^s) \, e^{-\varkappa \sum_i \alpha_i}, \qquad (10)$$

где

$$\varphi_{\text{ков}}(\alpha_i, p^s) = (-i)^n \tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \lim_{\gamma,\beta \to 0} \int \prod_k d^2q^k \exp\left\{\sum_i \left[i\alpha_i (2Q^i_+ Q^i_- - M_i^2) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + i(Q^i_+ y_i^+ + Q^i_- y_i^-) - \gamma {Q^i_+}^2 - \beta {Q^i_-}^2\right]\right\}\right|_{y_i=0}. \qquad (11)$$

В приложении 2 показано, что в выражении (8) пределы по γ и β (поочередно) можно переставить со знаком интеграла по $\{\alpha_i\}$, а затем и с $\tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$. Тогда, сравнивая соотношения (8), (9) и (10), (11), легко убедиться, что $\widehat{F} = F_{\text{ков}}$. Учитывая формулу (6) и используя утверждение 1 из приложения 1, получаем равенство

$$F_{\text{ков}} = \lim_{\varkappa \to 0} \int \prod_k dq_+^k \int_{B_L} \prod_k dq_-^k \, \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q^i_+ Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa)}. \qquad (12)$$

Выражение (12) отличается от (4) только областью интегрирования по q_-^k.

3. ПРИВЕДЕНИЕ РАЗНИЦЫ МЕЖДУ СВЕТОПОДОБНЫМ И ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНЫМ ИНТЕГРАЛАМИ ФЕЙНМАНА К СУММЕ КОНФИГУРАЦИЙ

Введем разбиение для каждой линии

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dQ_- + \int_{\varepsilon}^{\infty} dQ_-\right) = \left[\int dQ_- + (-1)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dQ_-\right]. \qquad (13)$$

Определим понятия: линия первого рода – это линия, интегрирование по импульсу Q^i_- которой ведется в области $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (до снятия δ-функций); для линии второго рода интегрирование идет по $(-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$, а для полной линии – по области $(-\infty, \infty)$. На диаграммах будем их обозначать, как показано на рис. 1 *а*, *б*, *в*.

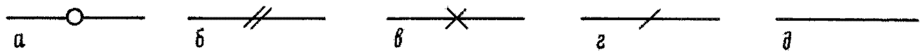

Рис. 1. Обозначения разных типов линий на диаграммах: *а* – линия первого рода; *б* – линия второго рода; *в* – полная линия, *г* – ε-линия; *д* – П-линия.

Подставим разбиение (13) в формулу (4) для $F_{\text{св}}$ и раскроем квадратные скобки. Среди получившихся слагаемых есть $F_{\text{ков}}$ (выражение (12)). Остальные слагаемые назовем конфигурациями диаграммы и обозначим через F_j. Получается соотношение $F_{\text{св}} - F_{\text{ков}} = \sum_j F_j$,

$$F_j = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\varkappa\to 0}\int \prod_k dq_+^k \int_{V_\varepsilon^j \cap B_L} \prod_k dq_-^k \, \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + i\varkappa)}, \tag{14}$$

где V_ε^j – область, соответствующая расположению полных линий и линий первого рода в данной конфигурации.

Заметим, что формулы (12) и (14) до взятия предела по ε можно применять последовательно: сначала применить к поддиаграмме, а затем подставить в формулу для всей диаграммы. Это допустимо, т.к. после деформации контуров, описанной в доказательстве утверждения 1 из приложения 1, интеграл по петлевым импульсам $\{q_+^k\}$ поддиаграммы сходится (после интегрирования по переменным $\{q_-^k\}$ этой поддиаграммы) абсолютно и равномерно по оставшимся петлевым импульсам $\{q_-^{k'}\}$ и, значит, интегралы по $\{q_+^k\}$ и $\{q_-^{k'}\}$ можно переставлять.

Итак, разница между светоподобным и лоренц-ковариантным расчетами диаграммы дается суммой всех ее конфигураций. Конфигурацией диаграммы называется эта же диаграмма, для каждой линии которой указано, является ли она полной линией или линией первого рода при условии, что существует хотя бы одна линия первого рода.

4. ПОВЕДЕНИЕ КОНФИГУРАЦИИ ПРИ $\varepsilon \to 0$

Будем считать, что у рассматриваемой диаграммы внешние импульсы p^s фиксированы, причем

$$p_-^s \neq 0, \qquad \sum_{s'} p_-^{s'} \neq 0, \tag{15}$$

где сумма берется по любому набору внешних импульсов и считается, что все они направлены внутрь диаграммы.

Рассмотрим произвольную конфигурацию. Будем называть ε-линиями все линии первого рода и такие полные линии, для которых интегрирование по Q_- фактически не выходит за пределы области $(-r\varepsilon, r\varepsilon)$, где r – конечное число (далее поясняется, когда такие линии появляются). Все остальные полные линии будем называть П-линиями. На диаграммах ε-линии и П-линии будем обозначать, как показано на рис. 1 *г*, *д*. Заметим, что диаграмма может быть нарисована линиями “*а*” и “*в*” из рис. 1 (это однозначно задает конфигурацию) или же линиями “*г*” и “*д*” (тогда конфигурация не однозначна).

Если к вершине подходит только одна полная линия, а остальные линии первого рода, то из-за сохранения импульса в вершине указанная полная линия является ε-линией. Оставшиеся полные линии образуют поддиаграмму (возможно, несвязную). Из-за условий (15) существует ее связная часть, к которой подходят все внешние линии. Для остальных связных частей все их внешние линии являются

ε-линиями, следовательно, применяя утверждение 1 из приложения 1, видим, что интегрирование по внутренним импульсам этих связных частей можно вести в области размера порядка ε, т.е. все их внутренние линии – это ε-линии. Таким образом, произвольную конфигурацию можно нарисовать так, как показано на рис. 2, и ей сопоставляется интеграл (14) с соответствующей областью интегрирования.

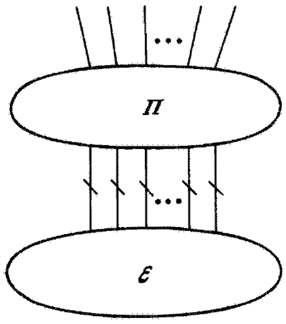

Рис. 2. Вид произвольной конфигурации: П – связная поддиаграмма, состоящая из П-линий; ε – поддиаграмма, состоящая из ε-линий, возможно, не содержащая ни одной вершины.

Исследуем поведение конфигурации при $\varepsilon \to 0$. С этого момента удобно представлять пропагатор не в виде (2), а в форме

$$\frac{\tilde{z}(Q)}{Q^2 - m^2 + i\varkappa}, \quad \text{где} \quad \tilde{z}(Q) = z(Q) \quad \text{или} \quad \tilde{z}(Q) = \frac{z(Q)}{2Q_- + i\varkappa/Q_+}. \tag{16}$$

Тогда в выражении (1) $M_i^2 = m_i^2 + {Q_\perp^i}^2 \neq 0$, а функция $\tilde{f}$ уже не является полиномом. Если числитель подынтегрального выражения состоит из нескольких слагаемых, то будем каждое слагаемое рассматривать отдельно (за исключением случая, когда на слагаемые разбивается пропагаторный импульс Q_-^i при его выражении через петлевые и внешние импульсы).

Будем обозначать петлевые импульсы поддиаграммы П на рис. 2 через q^l, а остальные – через k^m. Сделаем в выражении (14) замену переменных интегрирования

$$k_-^m \to \varepsilon\, k_-^m. \tag{17}$$

Тогда интегрирование по k_-^m будет идти в конечных пределах, не зависящих от ε. Степень ε в общем множителе, возникшую из элементов объема и числителей при преобразовании (17), обозначим через τ. При этом считаем, что вклад в τ от выражения $1/(2Q_- + i\varkappa/Q_+)$ из формулы (16), относящегося к ε-линии, равен -1. Разобьем область интегрирования по k_+^m, q_+^l на секторы так, чтобы в пределах одного сектора импульсы всех полных линий Q_+^i имели постоянный знак. В утверждении 1 из приложения 1 показано, что для каждого сектора можно изогнуть контуры интегрирования по q_-^l, k_-^m так, что будет иметь место абсолютная сходимость по q_+^l, k_+^m, q_-^l, k_-^m. Так как при этом импульсы Q_-^i П-линий отделены от нуля не зависящей от

ε константой, то соответствующие пропагаторы и множители из вершин, связанные с П-линиями, можно разложить в ряд по ε (начинающийся, возможно, с отрицательной степени) и это разложение будет перестановочно с интегрированием. Оттуда же видно, что знаменатели пропагаторов допускают оценки при неограниченном росте $|Q_+|$:

$$\left|\frac{1}{2Q_+Q_- - M^2 + i\varkappa}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{c\,|Q_+|} & \text{для П-линий}, & (18) \\ \dfrac{1}{\tilde{c}\varepsilon|Q_+|} & \text{для } \varepsilon\text{-линий}, & (19) \end{cases}$$

где c, $\tilde{c}$ – не зависящие от ε константы. Заметим, что при фиксированных конечных Q_+ оцениваемые выражения ограничены при $\varepsilon \to 0$. После преобразования (17) и вынесения множителя $\frac{1}{\varepsilon}$ (в соответствии со сказанным о вкладе в τ) выражение из формулы (16), относящееся к ε-линии, изменится следующим образом:

$$\left|\frac{1}{2Q_- + i\varkappa/Q_+}\right| \to \left|\frac{1}{2Q_- + i\varkappa/(Q_+\varepsilon)}\right| \leqslant \frac{1}{2|Q^i_-|},$$

где сделана оценка величиной, не зависящей от Q^i_+ (причем эта величина имеет смысл и не зависит от ε, т.к. значение Q^i_- отделено от нуля константой, не зависящей от ε).

Будем интегрировать сначала по q^l_+, k^m_+ в пределах одного сектора, а затем по q^l_-, k^m_- (заметим, что последний интеграл сходится равномерно по ε). Рассмотрим сходимость интеграла по q^l_+, k^m_+ при вычеркнутых знаменателях ε-линий (что эквивалентно оцениванию выражений (19) константой). Если он сходится, то исходный интеграл, очевидно, не зависит от ε и вклад от данного сектора в конфигурацию будет вести себя как ε^τ. Покажем, что если он расходится со степенью расходимости α, то вклад в исходный интеграл будет вести себя как $\varepsilon^{\tau-\alpha}$ с точностью до логарифмических поправок. Для этого разобьем область интегрирования по q^l_+, k^m_+ на две области: U_1, лежащую внутри шара радиуса Λ/ε (Λ фиксируется далее), и U_2, лежащую вне этого шара (напомним, что рассуждение ведется для каждого сектора отдельно). Теперь оценим (18) (как и (19)) через $\frac{1}{\tilde{c}\varepsilon|Q_+|}$ (что допустимо) и сделаем замену переменных интегрирования

$$q^l_+ \to \frac{1}{\varepsilon}\,q^l_+, \qquad k^m_+ \to \frac{1}{\varepsilon}\,k^m_+. \tag{20}$$

После вынесения общего множителя ε из числителя и элемента объема подынтегральное выражение перестает зависеть от ε. Интеграл сходится, значит, можно выбрать такое Λ (не зависящее от ε), что вклад области U_2 будет по модулю меньше вклада области U_1; следовательно, весь интеграл можно оценить через интеграл по конечной области U_1. Теперь сделаем замену, обратную замене (20), и оценим выражения (19) константой (как уже делалось выше). Так как размер области интегрирования равен Λ/ε, а степень расходимости – α, то интеграл будет вести себя как $\varepsilon^{-\alpha}$ (с точностью до логарифмических поправок), что и требовалось доказать. Это верно для каждого сектора, а значит, и для конфигурации в целом. Очевидно, что

$$\alpha = \max_r \alpha_r, \tag{21}$$

где α_r – индекс расходимости поддиаграммы, а максимум берется по всем поддиаграммам D_r (в том числе несвязным, для которых α_r есть сумма индексов расходимости ее связных частей). В рассматриваемом случае $\alpha_r = \omega_+^r + \nu^r$, где ν^r – число внутренних ε-линий в поддиаграмме D_r. Под $\omega_\pm^r$ понимаются индексы УФ-расходимости поддиаграммы D_r по $Q_\pm$. Ранее была введена величина τ, равная степени ε, возникающей из числителей и элементов объема всей конфигурации. Можно написать $\tau = \omega_-^r - \mu^r + \nu^r + \eta^r$, где μ^r – индекс УФ-расходимости по Q_- поддиаграммы (возможно, древесной или несвязной), состоящей из П-линий, входящих в D_r; η^r – степень ε в общем множителе, возникшая при преобразовании (17) из элементов объема и числителей линий, не вошедших в D_r (подразумевается, что импульсы интегрирования выбраны так, как при подсчете ее индексов расходимости). Тогда с точностью до логарифмических поправок имеем

$$F_j \sim \varepsilon^\sigma, \qquad \sigma = \min_r(\tau, \omega_-^r - \omega_+^r - \mu^r + \eta^r). \tag{22}$$

Следовательно, в пределе $\varepsilon \to 0$ конфигурация равна нулю, если для нее $\sigma > 0$. Соотношение (22) позволяет выделить все существенные конфигурации.

5. ПРОЦЕДУРА ИСПРАВЛЕНИЯ И АНАЛИЗ ВОЗНИКАЮЩИХ КОНТРЧЛЕНОВ

Мы хотим построить исправленный светоподобный гамильтониан $H_{\text{св}}^{\text{исп}}$ с обрезанием $|Q_-^i| > \varepsilon$, который порождал бы функции Грина, совпадающие в пределе $\varepsilon \to 0$ с ковариантными функциями Грина в рамках теории возмущений. За основу берем обычный канонический гамильтониан в светоподобных координатах $H_{\text{св}}$ с обрезанием $|Q_-^i| > \varepsilon$. Считаем известным, что подынтегральные выражения диаграмм Фейнмана, полученные из такого светоподобного гамильтониана, совпадают с ковариантными после определенного пересуммирования [1–3]. Но разница может возникнуть из-за различия в способе взятия интеграла, в частности, из-за разной вспомогательной регуляризации. Как показано в разделе 3, эта разница равна (после взятия предела $\varepsilon \to 0$) сумме всех конфигураций диаграммы, построенных соответствующим образом. Надо добавить к $H_{\text{св}}$ такие исправляющие контрчлены, которые порождают дополнительные (“контрчленные”) диаграммы, воспроизводящие ненулевые (после взятия предела по ε) конфигурации всех диаграмм. Сделав это, мы получили бы искомый $H_{\text{св}}^{\text{исп}}$. На самом деле, мы покажем лишь, как искать $H_{\text{св}}^{\text{исп}}$, порождающий функции Грина, совпадающие с ковариантными везде, кроме множества меры нуль в пространстве внешних импульсов (определяемого условием (15)). Однако это ограничение несущественно, т.к. такое возможное различие не сказывается на физических результатах.

Исправление будем вести аналогично процедуре перенормировки. Считаем, что теория возмущений строится по числу петель. Исправление ведем поэтапно: находим контрчлены к гамильтониану, порождающие все ненулевые конфигурации диаграмм не выше данного порядка, затем переходим к следующему порядку. Учитываем, что в нем появятся контрчленные диаграммы, возникшие из контрчленов, добавленных к гамильтониану в низших порядках. Теперь вводим новые исправляющие контрчлены, порождающие оставшуюся в этом порядке разницу. Покажем, как последовательно искать исправляющие контрчлены.

Назовем конфигурацию ненулевой, если она не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Будем называть ненулевую конфигурацию "первичной", если в ней П – древесная поддиаграмма (см. рис. 2). Заметим, что для такой конфигурации разрыв любой П-линии приводит к нарушению условий (15); получающийся при этом результат не будем считать конфигурацией. Будем говорить, что конфигурация изменена, если в соответствующем ей интеграле (14) для всех П-линий проведено разложение в ряд по ε (см. раздел 4 перед формулой (18)) и оставлены только члены, ненулевые в пределе $\varepsilon \to 0$ после интегрирования. Как упоминалось выше, разложение в такой ряд и интегрирование перестановочны. Значит, в пределе $\varepsilon \to 0$ измененная и неизмененная конфигурации совпадают; поэтому всегда будем требовать, чтобы контрчлены гамильтониана порождали измененные конфигурации, т.к. это упрощает вид контрчленов. С помощью дополнительных членов в гамильтониане можно порождать только контрчленные диаграммы, равные нулю при внешних импульсах, удовлетворяющих условию $|p_-^s| < \varepsilon$, поскольку при используемом обрезании (см. введение) внешние линии диаграмм не несут импульсов с $|p_-^s| < \varepsilon$. Всегда будем иметь это в виду.

Будем искать контрчлены по индукции. Ясно, что в первом порядке по числу петель все ненулевые конфигурации первичные. Добавим порождающие их контрчлены к гамильтониану. Рассмотрим произвольный порядок теории возмущений. Пусть в более низких порядках все ненулевые конфигурации, которые можно получить из контрчленов с учетом сделанного замечания, уже порождены гамильтонианом (с указанными оговорками). Перейдем к данному порядку. Рассмотрим сначала ненулевые конфигурации, в которых есть только один петлевой импульс k, а остальные – импульсы q (см. обозначения перед формулой (17)).

Будем поочередно разрывать по одной линии конфигурации, не затрагивая остальных линий (так что концы разорванной линии станут внешними линиями). В результате разрыва может получиться конструкция, которая не считается конфигурацией (если для нее нарушаются условия (15)) – нулевая конфигурация, или ненулевая конфигурация. Если для любой разрываемой линии реализуется первый случай, то исходная конфигурация первичная и ее нужно породить контрчленами гамильтониана в данном порядке. Если реализуются первый и второй случаи, то исходную конфигурацию назовем действительной; ее тоже нужно породить в данном порядке. Теперь допустим, что для некоторой линии реализовался третий случай. Значит, получившаяся при разрыве конфигурация появляется из контрчленов в низших порядках. Тогда после восстановления разорванной линии (т.е. после проведения соответствующего интегрирования) оказывается, что контрчленами низших порядков порождена исходная конфигурация (учитываем замечание о последовательном применении формулы (14), см. конец раздела 3) со следующими отличиями: 1) разорванная линия (и, возможно, еще некоторые, если после разрыва возникла неодносвязная диаграмма) является не П-линией, а линией второго рода из-за условий $|p_-^s| > \varepsilon$; 2) если при восстановлении разорванной линии поведение при малых ε ухудшилось (т.е. σ уменьшилось), то в рядах по ε, о которых шла речь выше, будет учтено меньше членов, чем нужно принять во внимание для исходной конфигурации. Разложим появившиеся линии второго рода, как это делалось выше, по формуле (13). Получатся слагаемое, где все эти линии заменены П-линиями, и слагаемые, где некоторые из них (или все) стали линиями первого рода. Во втором случае один из импульсов q превращается в импульс k; эти слагаемые (назовем их повторной частью конфигурации) мы будем анализировать вместе с конфигурациями, у которых два импульса k. В первом случае получаем исходную конфигурацию с точностью до отличия 2. Добавим к гамильтониану контрчлен, компенсирующий это отличие (порождаемые им контрчленные диаграммы назовем компенсирующими).

Если линия, для которой реализуется третий случай, только одна, то оказывается, что в данном порядке исходную конфигурацию порождать контрчленами не нужно, кроме компенсирующей добавки и повторной части, которая рассматривается на следующем этапе. Если же третий случай реализуется для нескольких линий, то исходная конфигурация будет порождена в низших порядках более одного раза. Для компенсации этого нужно породить ее (с соответствующим числовым коэффициентом и обратным знаком) контрчленами гамильтониана в данном порядке. Такую конфигурацию назовем вторичной. Далее, переходим к рассмотрению конфигураций с двумя импульсами k и т.д. вплоть до конфигураций со всеми импульсами k, а они являются первичными.

Таким образом, контрчленами гамильтониана нужно порождать конфигурации типа первичных (не только исходные первичные конфигурации, но и аналогичные им повторные части): действительные, компенсирующие и вторичные. Если в теории не может быть ни петли, состоящей только из линий, несущих Q_+ в числителе (с учетом вкладов вершин), ни линии, несущей ${Q_+}^n$ в числителе при $n > 1$, то действительных конфигураций нет, потому что тогда можно всегда разорвать линию, не имеющую в числителе Q_+, и при этом σ не увеличится (см. формулу (22)). Несложно доказать, что если возникают только двухвостые первичные, действительные и компенсирующие конфигурации, то вторичных конфигураций нет вообще.

Зависимость от внешних импульсов первичной конфигурации становится тривиальной, если для нее степень расходимости α положительна и максимум в формуле (21) достигается на самой диаграмме, а $\sigma = 0$. Тогда в упоминавшихся выше рядах учитывается только первый член; значит, все относящиеся к П-линиям пропагаторы и множители из вершин не зависят от k_-^m и их можно вынести из-под знака интеграла по $\{k_-^m\}$ в выражении (14). Получится

$$F_j^{\text{перв}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\varkappa\to 0}\int\prod_m dk_+^m\,\frac{\tilde f'(k^m,p^s)}{\prod_i(2Q_+^iQ_-^i - M_i^2 + i\varkappa)}\times$$
$$\times\int_{V_\varepsilon}\prod_m dk_-^m\,\frac{\tilde f''(k^m)}{\prod_k(2Q_+^kQ_-^k - M_k^2 + i\varkappa)}, \tag{23}$$

где V_ε – область размером порядка ε. Сделаем преобразования (17) и (20). При этом для знаменателя П-линии получим

$$\frac{1}{2\left(\frac{1}{\varepsilon}\sum k_+ + \sum p_+\right)\left(\sum p_-\right) - M^2 + i\varkappa} \to \frac{\varepsilon}{2\left(\sum k_+\right)\left(\sum p_-\right)}.$$

Здесь слагаемыми порядка ε в знаменателе пренебрегаем, т.к. особенность при $k_+^m = 0$ интегрируема при указанных условиях на α, а при $\sigma = 0$ все можно вычислять в нулевом порядке по ε. Таким образом, вся зависимость от внешних импульсов соберется в легко получаемый общий множитель.

6. ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИ ЮКАВЫ

В модели Юкавы существуют диаграммы, не удовлетворяющие условию (3). Они изображены на рис. 3 *а*, *б*. Для диаграммы "*а*" имеем $\omega_{||} = 0$, для "*б*" – $\omega_+ = 0$.

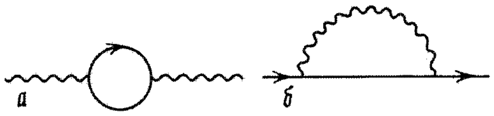

Рис. 3. Диаграммы модели Юкавы, не удовлетворяющие условию (3).

Тем не менее эти диаграммы нетрудно включить в общую схему рассуждений. Для этого в логарифмически расходящейся (в двумерии, при фиксированных внутренних поперечных импульсах) диаграмме "*а*" нужно вычесть под интегралом расходящуюся часть, не зависящую от внешних импульсов. Получится выражение, в котором с $\omega_{||} < 0$ (т.е. сходящееся в двумерии), но $\omega_+ = 0$, как и в диаграмме "*б*". Это означает, что интеграл по q_+ сходится лишь в смысле главного значения (а именно такое значение интеграла нужно брать в светоподобных координатах, чтобы обеспечить соответствие со стационарной нековариантной теорией возмущений). Получить это значение можно, выделив четную по q_+ часть подынтегрального выражения. Возможны два подхода: либо с самого начала ввести подходящую регуляризацию по поперечным импульсам и подразумевать интегрирование по ним, тогда удобно выделить четную часть по четырехмерным импульсам q, либо оставить все поперечные импульсы фиксированными, тогда четную часть можно выделить только по продольным импульсам $q_{||}$. Для теории Юкавы можно воспользоваться первым подходом, применив для поперечной регуляризации "размазывание" вершин, эквивалентное делению каждого пропагатора на $1 + {Q_\perp^i}^2/{\Lambda_\perp}^2$. В четырехмерии диаграмма "*а*" квадратично расходится. При введении и последующем снятии поперечной регуляризации расходящаяся часть, которую мы ранее вычли из этой диаграммы, приобретает вид $C_1 + C_2 p_\perp^2$.

После упомянутого выделения четной части регуляризованного выражения опять зафиксируем все поперечные импульсы. Теперь оказывается, что для диаграмм "*а*", "*б*" на рис. 3 условия (3) выполнены, и можно показать, что после указанных операций показатель σ (см. формулу (22)) для всех их конфигураций не уменьшается. Значит, включение их в общую схему не требует никаких корректировок.

Проанализируем сначала первичные конфигурации (см. определение в разделе 5). В числителях k_- появляется только в нулевой или первой степени, причем нет петель, в которых числители всех линий содержат k_-; следовательно, всегда $\tau > 0$, $\mu^r \leqslant 0$, $\eta^r \geqslant 0$ (см. определения в разделе 4). Анализируя свойства выражения $\omega_-^r - \omega_+^r$ для диаграмм теории Юкавы, можно заключить из формулы (22), что всегда $\sigma \geqslant 0$. Общий вид ненулевых первичных конфигураций с $\sigma = 0$ изображен на рис. 4. Заметим, что все они двухвостые.

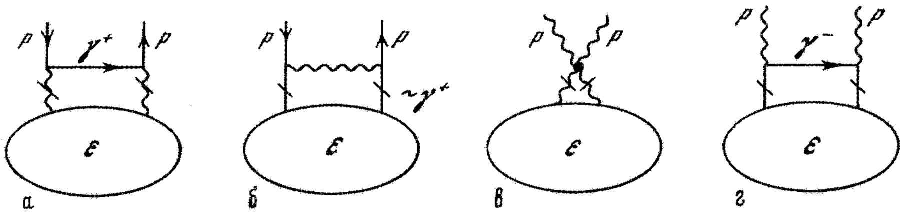

Рис. 4. Ненулевые конфигурации в модели Юкавы: p – внешний импульс; символ γ^+ или γ^- на линии означает, что в числителе пропагатора взято соответствующее слагаемое; в конфигурации "$б$" имеется в виду ее часть, пропорциональная γ^+.

Далее, ясно, что ненулевых действительных конфигураций нет (см. замечание о них в конце раздела 5), и можно показать по индукции, что ненулевых компенсирующих и вторичных конфигураций тоже нет (определения приведены там же). Значит, ненулевыми могут быть только первичные конфигурации или конфигурации типа первичных, и все они имеют вид, изображенный на рис. 4. Можно показать, что для них степень расходимости α положительна и максимум в формуле (21) достигается на самой диаграмме. Значит, к ним относятся рассуждения, приведенные перед и после формулы (23). Тогда, обозначив конфигурации, изображенные на рис. 4 $а$ – $г$, через $D_а$– $D_г$, приходим к равенствам $D_а = \frac{\gamma^+}{p_-} C_а$, $D_б = \frac{\gamma^+}{p_-} C_б$, $D_в = C_в$, $D_г = C_г$, где выражения $C_а$ – $C_г$ зависят только от масс и поперечных импульсов, но не от внешних продольных импульсов и имеют конечный предел при $\varepsilon \to 0$.

Будем теперь считать, что $D_а$ – $D_г$ не одиночные конфигурации, а суммы всех конфигураций такого же вида и что интегрирование по внутренним поперечным импульсам уже выполнено (с описанной регуляризацией). В четырехмерии диаграммы $D_а$ и $D_б$ расходятся линейно, а $D_в$ и $D_г$ – квадратично. Поэтому из-за поперечной регуляризации коэффициенты $C_в$ и $C_г$ в пределе ее снятия приобретают вид $C_1 + C_2 p_\perp^2$, где C_1, C_2 не зависят от внешних импульсов (равно как и $C_а$, $C_б$). Значит, чтобы породить с помощью светоподобного гамильтониана все ненулевые конфигурации, к нему достаточно добавить выражение

$$H_c = \widetilde{C}_1 \varphi^2 + \widetilde{C}_2 p_\perp^2 \varphi^2 + \widetilde{C}_3 \overline{\psi} \frac{\gamma^+}{p_-} \psi, \tag{24}$$

где φ и ψ – соответственно бозонное и фермионное поля, а $\widetilde{C}_i$ – постоянные коэффициенты.

Сравнивая выражение (24) с исходным каноническим светоподобным гамильтонианом, легко заметить, что найденные контрчлены сводятся к перенормировке отдельных его слагаемых (в частности, квадрата массы бозона и квадрата массы фермиона без изменения самой массы фермиона). Явная лоренц-инвариантность здесь отсутствует, и это компенсирует нарушение лоренц-инвариантности, присущее светоподобному формализму.

Заметим, что при использовании второго подхода, о котором шла речь в начале раздела, можно получить те же результаты. Единственное отличие заключается в том, что в двумерии вклады конфигураций, изображенных на рис. 3, имели бы дополнительную зависимость от внешних поперечных импульсов. Однако эта зависимость исчезает после интегрирования по внутренним поперечным импульсам с введением подходящей регуляризации и последующим ее снятием.

Нетрудно убедиться, что при использовании регуляризации Паули–Вилларса выражение $\omega_-^r - \omega_+^r - \mu^r + \eta^r$ из формулы (22) увеличивается (т.к. увеличивается число знаменателей пропагатора; при этом вклад от ε-линий не меняется, а от П-линий, принадлежащих D_r, добавляется 0 в $\omega_-^r - \omega_+^r$ и в η^r, но -1 в μ^r). Поскольку $\tau > 0$, то при такой регуляризации можно удовлетворить условию $\sigma > 0$ для конфигураций, бывших ненулевыми (достаточно одного бозонного и одного фермионного дополнительных полей). Тогда окажется, что канонический светоподобный гамильтониан вообще не требует исправления.

7. ПРИМЕНЕНИЕ К КАЛИБРОВОЧНЫМ ТЕОРИЯМ

Рассмотрим калибровочную теорию (например, КЭД или КХД) в калибровке $A_- = 0$. При этом пропагатор бозона в форме Мандельстама–Лейббрандта имеет вид

$$\frac{1}{Q^2 + i\varkappa}\left(g_{\mu\nu} - \frac{Q_\mu \delta_\nu^+ Q_+ + Q_\nu \delta_\mu^+ Q_+}{2Q_+Q_- + i\varkappa}\right).$$

Выше все рассуждения строились так, чтобы они были применимы к такой теории (при фиксированных поперечных импульсах $Q_\perp \neq 0$). Оказывается, что существуют ненулевые конфигурации со сколь угодно большим числом внешних линий. Пример такой конфигурации приведен на рис. 5.

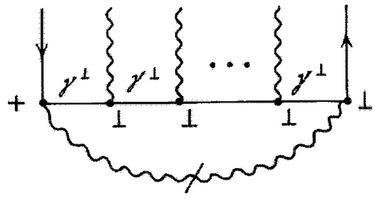

Рис. 5. Ненулевая конфигурация со сколь угодно большим числом внешних линий в калибровочной теории. Символы $\gamma^\perp$ на линиях, $+$ или $\perp$ рядом с вершинами означают, что в числителях пропагаторов и в вершинных множителях берутся соответствующие слагаемые γ^+ или $\gamma^\perp$.

Действительно, используем формулу (22), тогда видно, что для этой конфигурации $\tau = 0$, а следовательно, $\sigma \leqslant 0$, т.е. конфигурация ненулевая. Ясно также, что введение регуляризации Паули–Вилларса ситуацию не улучшит, т.к. не может повлиять на величину τ.

Таким образом, в рамках изложенного метода для исправления канонического светоподобного гамильтониана калибровочной теории к нему необходимо добавить бесконечное число контрчленов. Заметим, однако, что сформулированные условия обращения в нуль конфигурации являются достаточными, но, вообще говоря, не необходимыми. Из-за этого, а также из-за возможных сокращений между различными конфигурациями после интегрирования по поперечным импульсам число необходимых контрчленов может оказаться меньше.

Авторы благодарят Е. В. Прохватилова за обсуждение работы и ценные замечания.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94-02-05520-а.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Утверждение 1. *Если выполнены условия* (3), *то при фиксированных внешних импульсах* p^s *и при* $p_-^s \neq 0$ $\forall s$ *верно равенство*

$$\lim_{\beta\to 0}\lim_{\gamma\to 0}\int\prod_k dq_+^k\int_{V_\varepsilon}\prod_k dq_-^k\,\frac{\tilde f(Q^i,p^s)\exp\{-\gamma\sum_i {Q_+^i}^2-\beta\sum_i {Q_-^i}^2\}}{\prod_i(2Q_+^iQ_-^i-M_i^2+i\varkappa)}=$$

$$=\int\prod_k dq_+^k\int_{V_\varepsilon\cap B_L}\prod_k dq_-^k\,\frac{\tilde f(Q^i,p^s)}{\prod_i(2Q_+^iQ_-^i-M_i^2+i\varkappa)},\tag{П.1.1}$$

причем входящие сюда выражения существуют и интеграл по $\{q_+^k\}$ *в правой части сходится абсолютно. Считается, что импульсы линий* Q^i *выражены через петлевые импульсы* q^k; V_ε *– область, соответствующая наличию полных линий, линий первого и второго родов* (*определение после формулы* (13)); B_L *– шар радиуса* L, *где* $L \geqslant S\,\max_s|p_-^s|$, S *– число, зависящее от структуры диаграммы.*

Докажем утверждение. Для каждой линии первого рода в (П.1.1) проведем разбиение

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dQ_-^i = \left[\int dQ_-^i + (-1)\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dQ_-^i + \int_{\varepsilon}^{\infty} dQ_-^i\right)\right].$$

Тогда обе части уравнения (П.1.1) превратятся в сумму выражений такого же вида, в которых, однако, область V_ε соответствует наличию только полных линий и линий второго рода. Ясно, что, доказав утверждение для такого V_ε (что и будет сделано), мы докажем и исходное утверждение.

Пусть $\widetilde B$ – такая область, что поверхности, на которых $Q_-^i = 0$, не являются касательными к границе $\widetilde B$. Докажем сначала, что в выражении

$$\int\prod_k dq_+^k\int_{V_\varepsilon\cap\widetilde B}\prod_k dq_-^k\,\frac{\tilde f(Q^i,p^s)\,\exp\{-\beta\sum_i {Q_-^i}^2\}}{\prod_i(2Q_+^iQ_-^i-M_i^2+i\varkappa)}\tag{П.1.2}$$

интеграл по $\{q^k_+\}$ сходится абсолютно (интеграл по $\{q^k_-\}$ здесь конечен, т.к. $\varkappa > 0$, $\beta > 0$). Это становится очевидным (с учетом условий (3) и того факта, что в линиях второго рода импульс Q^i_- отделен от нуля), если можно деформировать контуры интегрирования по $\{q^k_-\}$ так, чтобы импульсы Q^i_- полных линий были отделены от нуля на конечную величину (в пределах области $V_\varepsilon \cap \widetilde{B}$). В этом случае можно повторить известные рассуждения Вайнберга [8]. Помешать деформации может или "зажимание" контура, или попадание точки $Q^i_- = 0$ на границу интегрирования.

Исследуем первый вариант. Разобьем область интегрирования по q^k_+ на секторы так, чтобы в пределах одного сектора импульсы всех полных линий Q^i_+ имели постоянный знак. Рассмотрим один сектор. Возьмем набор полных линий, у которых Q^i_- могут одновременно обращаться в нуль. Изогнем контуры интегрирования по $\{q^k_-\}$ в окрестности точки, где Q^i_- из данного набора одновременно обращаются в нуль так, чтобы эти контуры прошли через значения $Q^i_- = iB^i$, а импульсы Q^i_- линий второго рода не изменились. Пусть B^i таковы, что $B^i Q^i_+ \geqslant 0$ для линий из набора (при Q^i_+ из рассматриваемого сектора). Легко проверить, что такое изгибание можно выполнить (т.к. изгибаются контуры по q^k_-, а Q^i_- выражаются через q^k_-, то достаточно проверить, что существуют b^k, через которые нужные B^i выражаются так же, т.е. что B^i удовлетворяют законам сохранения, причем текут только по полным линиям). При указанном изгибании, достаточно малом и по величине отклонения, и по размеру области, где это отклонение происходит, контуры не будут пересекать полюсов, т.к. для знаменателя каждой линии из рассматриваемого набора имеем

$$\left(2Q^i_+ Q^i_- - M_i^2 + i\varkappa\right) \to \left(2Q^i_+(Q^i_- + iB^i) - M_i^2 + i\varkappa\right), \quad Q^i_+ B^i \geqslant 0,$$

а для остальных знаменателей изгибание происходит в области, отделенной от точки, где соответствующие импульсы $Q^i_- = 0$. Повторяя рассуждения для всех наборов, видим, что "зажимания" контура нет.

Второй вариант исключается указанным выше условием на $\widetilde{B}$. Чтобы это увидеть, нужно ввести такие координаты ξ^α в q^k-пространстве, что граница области $\widetilde{B}$ будет определяться уравнением $\xi^1 = a = \mathrm{const}$, и провести рассуждения, аналогичные изложенным выше, для координат ξ^α с $\alpha \geqslant 2$.

После изгибания контуров интеграл (П.1.2) сходится абсолютно по q^k_+, q^k_-, если интегрирование по q^k_+ ведется в пределах рассматриваемого сектора. Заметив, что результат внутреннего интегрирования в (П.1.2) не зависит от проводимого изгибания, складываем интегралы по всем секторам и заключаем, что абсолютная сходимость по $\{q^k_+\}$ в (П.1.2) имеет место.

Теперь докажем, что если $\widetilde{B}$ – достаточно малая конечная окрестность точки $\{\tilde{q}^k_-\}$, лежащей вне шара B_L, то выражение (П.1.2) равно нулю. Рассмотрим импульс одной линии Q^i_-. Проследим за тем, как он течет по диаграмме: он может разветвляться, может сливаться с другими импульсами. Ясно, что возможны две ситуации: либо он весь вытечет через внешние линии, либо после, может быть, долгого блуждания какая-то его часть $\widetilde{Q}_-$ сделает полный круг. Первая ситуация будет возможна, только если $|Q^i_-| \leqslant \sum_r |p^r_-|$, где суммируются все вытекающие из диаграммы (но не втекающие в нее) внешние импульсы. Очевидно, что можно выбрать S так, чтобы при $\{q^k_-\}$ из $\widetilde{B}$ существовала линия, импульс которой нарушает указанное условие. Вторая ситуация приводит к существованию петли, для импульсов линий которой $Q_-^i > \widetilde{Q}_-$, причем положительное направление импульсов – вдоль петли. Тогда интеграл по q_+^k указанной петли можно переставить с интегралами по $\{q_-^k\}$ (т.к. он сходится абсолютно и равномерно по всем q_-^k) и взять по формуле вычетов. Так как для линий рассмотренной петли Q_-^i отделены от нуля и знакоопределены, то результат равен нулю. Это имеет простой физический смысл. Если перейти к стационарной нековариантной теории возмущений, то окажется, что бывают кванты только с положительными Q_-. При этом внешние частицы с положительным p_- влетающие, а с отрицательным p_- вылетающие. Тогда из закона сохранения импульса следует условие реализации первой ситуации.

Из описанных областей $\widetilde{B}$ можно построить все пространство вне B_L (на бесконечности все хорошо сходится из-за наличия множителя $\exp(-\beta\sum_i {Q_-^i}^2)$). Значит, в левой части уравнения (П.1.1) можно заменить область интегрирования V_ε на $V_\varepsilon \cap B_L$, внести предел по γ под знак интеграла по $\{q_+^k\}$ из-за его абсолютной сходимости и внести предел по β из-за ограниченности области интегрирования по $\{q_-^k\}$, после чего получится правая часть. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Если V_ε соответствует наличию только линий второго рода, то при тех же условиях, что и в утверждении* 1, *верно равенство*

$$\int_{V_\varepsilon} \prod_k dq_-^k \int \prod_k dq_+^k \, \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + i\varkappa)} = \\ = \int \prod_k dq_+^k \int_{V_\varepsilon \cap B_L} \prod_k dq_-^k \, \frac{\tilde{f}(Q^i, p^s)}{\prod_i (2Q_+^i Q_-^i - M_i^2 + i\varkappa)}.$$

Доказывается это утверждение по аналогии со второй частью доказательства утверждения 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Утверждение. *Если выполнены условия* (3), *то в выражении* (8) *пределы по γ и β можно переставить* (*поочередно*) *со знаком интеграла по $\{\alpha_i\}$, а затем с $\tilde{f}(-i\frac{\partial}{\partial y_i})$.*

Для доказательства определим векторы $\{q_+^1, q_-^1, \ldots, q_+^l, q_-^l\} \equiv S$, $\{Q_+^1, Q_-^1, \ldots$ $\ldots, Q_+^n, Q_-^n\} \equiv \mu S + P$, $\{y_1^+, y_1^-, \ldots, y_n^+, y_n^-\} \equiv Y$, где вектор P построен только из внешних импульсов, а μ – матрица размера $l \times n$ ранга l, причем $\mu_{2k-1}^{2i} = \mu_{2k}^{2i-1} = 0$, $\mu_{2k}^{2i} = \mu_{2k-1}^{2i-1}$. Далее введем обозначения:

$$\widetilde{\Lambda}_i = \begin{pmatrix} \gamma & -i\alpha_i \\ -i\alpha_i & \beta \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}\{\widetilde{\Lambda}_1, \ldots, \widetilde{\Lambda}_n\}, \quad A = \mu^t \Lambda \mu,$$
$$B = \mu^t \Lambda P - \frac{1}{2} i \mu^t Y, \quad C = -P^t \Lambda P + i Y^t P - i \sum_i \alpha_i M_i^2.$$

Тогда из формулы (9) следует, что

$$\varphi(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta) = (-i)^n \tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \int d^{2l}S\, e^{-S^tAS-2B^tS+C}\bigg|_{y_i=0} = \\ = (-i)^n \tilde{f}\left(-i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) e^{B^tA^{-1}B+C} \frac{\pi^l}{\sqrt{\det A}}\bigg|_{y_i=0}. \qquad (\text{П.2.1})$$

Функция $\tilde{f}$ – полином, будем отдельно рассматривать каждое его слагаемое. С точностью до множителя оно имеет вид $\frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial y_{i_r}}$. Эти производные действуют на C и B. При действии на C появляется постоянный множитель iN^tP, а при действии на B – множитель $-(1/2)iN^t\mu A^{-1}B$ или $-(1/4)N_1^t\mu A^{-1}\mu^t N_2$ (последнее есть результат действия двух производных, N, N_1 и N_2 – постоянные векторы).

Надо отдельно доказать корректность трех процедур: 1) внесения под интеграл предела по γ при фиксированном $\beta > 0$; 2) внесения предела по β при $\gamma = 0$; 3) внесения пределов по γ и β под знаки дифференцирования по Y. В случаях 1 и 2 нужно получить оценки

$$\left|\varphi(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta)\right| \leqslant \widetilde{\varphi}(\alpha_i, p^s, \beta), \qquad (\text{П.2.2})$$

$$\left|\varphi(\alpha_i, p^s, 0, \beta)\right| \leqslant \widehat{\varphi}(\alpha_i, p^s), \qquad (\text{П.2.3})$$

где $\widetilde{\varphi}$ и $\widehat{\varphi}$ – функции, интегрируемые (для $\widetilde{\varphi}$ при $\beta > 0$) в любой конечной области по α_i при $\alpha_i \geqslant 0$. Тогда для случая 1 будем иметь

$$\left|\varphi(\alpha_i, p^s, \gamma, \beta) \exp\left\{-\varkappa \sum_i \alpha_i\right\}\right| \leqslant \widetilde{\varphi}(\alpha_i, p^s, \beta) \exp\left\{-\varkappa \sum_i \alpha_i\right\},$$

т.е. возникнет оценка интегрируемой функцией, а значит, предел по γ можно вносить под интеграл. Аналогично для случая 2. Из формулы (П.2.1) видно, что функция φ может быть сингулярна только при обращении в нуль собственных чисел матрицы A. Оценивая снизу эти собственные числа, можно доказать путем довольно длинных рассуждений, что при выполнении условия (3) оценки (П.2.2), (П.2.3) имеют место.

После того как пределы по γ и β внесены под знак интеграла, поменять их местами с дифференцированием по Y несложно, т.к. это достаточно сделать при $\alpha_i > 0$ (для каждого i), а в этом случае можно показать, что собственные числа матрицы A не обращаются в нуль и φ не сингулярна.

Список литературы

[1] *M. Burkardt, A. Langnau.* Phys. Rev. D. 1991. V. 44. P. 1187, 3857.
[2] *W.-M. Zhang, A. Harindranath.* Phys. Rev. D. 1993. V. 48. P. 4868, 4881, 4903.
[3] *N. E. Ligterink, B. L. G. Bakker.* Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 5954.
[4] *S. Mandelstam.* Nucl. Phys. B. 1983. V. 213. P. 149.
[5] *G. Leibbrandt.* Phys. Rev. D. 1984. V. 29. P. 1699.
[6] *R. Soldati.* The Mandelstam-Leibbrandt prescription and the Discretized Light Front Quantization. In: Theory of Hadrons and Light-Front QCD. Ed. S.D. Glazek. Singapore: World Scientific, 1995. P. 193.
[7] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
[8] *S. Weinberg.* Phys. Rev. 1960. V. 118. P. 838.

Поступила в редакцию
24.I.1997 г.

S. A. Paston, V. A. Franke

COMPARISION OF QUANTUM FIELD PERTURBATION THEORY ON THE LIGHT-FRONT WITH THE ONE IN LORENTZ COORDINATES

A relation between perturbation theory in light-front coordinates and the Lorentz-covariant perturbation theory is investigated. A method to find the difference between separate terms of the corresponding series without their explicit evaluation is proposed. By using this method the procedure of constructing additional counterterms to canonical Hamiltonian which compensate this difference at any finite order is worked out. For the Yukawa model the light-front Hamiltonian including all such counterterms is obtained in a closed form. Possible application of this approach to gauge theories is discussed.