

Глава 6

Дальние корреляции между множественностями и поперечными импульсами заряженных частиц в релятивистских ядерных столкновениях

Эта глава посвящена изучению корреляций между характеристиками частиц, регистрируемых в удаленных друг от друга по быстроте (рапидити) окнах во взаимодействиях адронов высоких энергий. Экспериментально, в системе центра масс, эти удаленные по рапидити окна обычно выбирают в разных полусферах вылета вторичных частиц - одно в передней, а другое в задней. Поэтому такие дальние корреляции, называют еще корреляциями "вперед-назад" или FB-корреляциями (forward-backward correlations). Внимание к изучению дальних FB-корреляций мотивируется тем, что они являются одним из инструментов, при помощи которого надеются обнаружить эффект слияния кварк-глюонных струн при их большой плотности в ядро-ядерных столкновениях при сверхвысоких энергиях.

В первом разделе этой главы мы ограничиваемся изучением только дальних корреляций множественности в pp и $p\bar{p}$ взаимодействиях, причем при этом мы исходим только из самых общих предположений о двухстадийном характере процесса образования мягких частиц в адронных столкновениях, когда на первой стадии столкновения формируется определенное число излучающих центров - цветных струн, натянутых между начальными партонами, а на второй стадии эти струны распадаются, испуская наблюдаемые адроны.

В частности, в этом разделе показано, что если предположить что излучение этих центров (цветных струн) носит пуассоновский характер с произвольным распределением по числу этих излучателей и по сред-

ней множественности каждого из них, то корреляции между излучением в переднюю и заднюю полусферы для симметричных окон однозначно связаны с видом результирующего распределения по множественности в переднем быстройном окне.

Далее в этом разделе показано, что если в соответствии с экспериментальными данными потребовать еще, чтобы корреляционная функция этих FВ-корреляций была линейной, то это с необходимостью приводит к результирующему распределению по множественности в переднем быстройном окне, имеющему вид отрицательного биномиального распределения, что также согласуется с имеющимися экспериментальными данными. При этом удается явно найти связь коэффициента корреляции с параметрами этого результирующего отрицательного биномиального распределения по множественности. В процессе вывода также показано, что из одинаковых пуассоновских элементарных излучателей невозможно построить систему с линейной корреляционной функцией и необходима смесь излучателей разной силы.

Во втором разделе этой главы дальние корреляции между множественностью и поперечным импульсом заряженных частиц в ядро-ядерных столкновениях изучаются в рамках модели взаимодействующих струн. Дело в том, что в случае ядро-ядерных столкновений с ростом энергии и атомного номера сталкивающихся ядер растет и число образующихся кварк-глюонных струн, и, начиная с какого-то момента, становится необходимым учет взаимодействия между ними. Один из возможных подходов к этой проблеме был предложен в модели сливающихся цветных струн [89]-[91].

В этом разделе мы предлагаем для описания дальних FВ корреляций простой дискретный аналог этой модели, позволяющий провести явные аналитические вычисления корреляционных функций в некоторых асимптотических случаях и способный упростить вычисления в случае реальных ядерных столкновений. При этом важность изучения именно дальних корреляций, основывается на том соображении, что кварк-глюонная струна является протяженным объектом, дающим при своей фрагментации вклад в широкий интервал быстрой. Это позволяет ожидать появления дальних (в пространстве быстрой) корреляций между величинами наблюдаемыми в удаленных друг от друга по рапидити окнах и проявления в этих корреляциях эффекта слияния цветных струн [91].

Однако, как было показано в работе [235], в ядро-ядерных столкновениях корреляции множественности, возникающие из-за слияния струн, сильно затенены корреляциями, возникающими из-за флуктуаций начального числа струн даже при фиксированном значении прицельного пара-

метра. Чтобы избежать этой трудности в работах [235, 237, 246] предлагалось перейти от изучения корреляций между экстенсивными наблюдаемыми (такими как множественность) к изучению корреляций между интенсивными наблюдаемыми (такими как, например, поперечный импульс). Поэтому, следуя этой идеи, во втором разделе мы приступаем, наряду с изучением дальних корреляций множественности ($n-n$), к изучению дальних корреляций между поперечными импульсами (p_t-p_t), а также корреляций между поперечными импульсами и множественностью частиц (p_t-n), рожденных в удаленных быстротных окнах.

При этом в качестве импульсных переменных (p_t), между которыми изучаются дальние корреляции, необходимо использовать не поперечные импульсы двух отдельных частиц, зарегистрированных в этих быстротных интервалах, а среднее значение поперечного импульса всех частиц, испущенных в данном событии в эти быстротные окна. Показано, что величина таких корреляций не зависит от общего числа струн, в отличие от парных 'дважды инклюзивных' корреляций, величина которых, как показано в [302], обратно пропорциональна среднему числу струн и поэтому чрезвычайно мала для случая ядро-ядерных столкновений при высоких энергиях.

Далее в этом разделе для идеализированного случая с однородным распределением струн в плоскости прицельного параметра в рамках предложенного дискретного варианта модели слияния струн аналитически вычислены асимптотики различных коэффициентов корреляции при большой и малой плотности струн и изучены их свойства.

Проведено сравнение найденных асимптотик с результатами прямых монте-карловских вычислений этих коэффициентов корреляции, как в рамках исходной модели слияния струн, так и в рамках предлагаемого ее простого дискретного аналога. Расчеты методом Монте-Карло позволяют найти значение этих коэффициентов при любой плотности струн. Показано, что предсказания модели слияния струн и ее дискретного аналога практически совпадают при любой плотности струн, и что поведение коэффициентов корреляции, вычисленных монте-карловским методом, хорошо согласуется с найденными асимптотическими формулами при большой и малой плотности струн.

Это позволяет использовать найденные асимптотики коэффициентов корреляции для отладки и контроля монте-карловских алгоритмов, дающих возможность проводить вычисления корреляционных функций для случая реальных ядерных столкновений - с учетом реалистического распределения струн в поперечной плоскости и с учетом флуктуаций прицельного параметра от события к событию, что является весьма актуаль-

ным в свете начавшихся в США и планируемых в Европе экспериментов по столкновению тяжелых ионов при сверхвысоких энергиях на суперколлайдерах RHIC и LHC.

Изложение в этой главе основано на работах [296, 297],[300]-[303],[306].

6.1 Характер дальних корреляций множественности в двустадийной модели

6.1.1 Введение

Для описания мягкой составляющей адронных и ядерных взаимодействий при высоких энергиях широко используется, ведущая свое происхождение от реджевского подхода, модель цветных струн [86, 87, 88]. В этой модели при взаимодействии сталкивающихся частиц образование наблюдаемых адронов происходит в два этапа. На первом этапе происходит формирование протяженных объектов - кварк-глюонных струн. На втором этапе в процессе адронизации этих струн рождаются наблюдаемые адроны. В исходном варианте модели процессы фрагментации разных струн протекают независимо, и наблюдаемая мягкая часть спектра адронов просто равна сумме спектров от отдельных струн.

В принципе, при большой плотности струн (в поперечной плоскости) необходимо учитывать взаимодействие этих струн, предшествующее их распаду, так как это делается, например, в модели сливающихся цветных струн [89]-[91]. Мы, однако, отложим до следующего раздела этой главы рассмотрение физических следствий, возникающих из детального анализа механизма слияния цветных струн, и сосредоточимся в настоящем разделе на изучении самых общих закономерностей, присущих двустадийным моделям образования мягких адронов.

В любом варианте этих моделей наблюдаемое распределение по множественности является сверткой распределения, описывающего вероятность формирования некоторой струнной конфигурации в процессе взаимодействия сталкивающихся частиц, и индивидуальных распределений по множественности, характеризующих распад отдельных струн этой конфигурации. Отметим, что как это обычно имеет место в теории струн [88], мы при этом не учитываем возможные интерференционные эффекты. Чтобы подчеркнуть общий характер рассмотрения в этом разделе, мы будем говорить, что на первом этапе в результате взаимодействия сталкивающихся частиц с определенной вероятностью образуется некоторая совокупность излучателей, которые затем распадаются по определенным законам, излучая наблюдаемые частицы.

Непосредственно экспериментально наблюдаемым является только результирующее распределение по множественности, поэтому, чтобы восстановить распределение по числу и типам образующихся излучателей и распределение по множественности, характеризующее распад отдельных излучателей, необходимо привлечение дополнительной экспериментальной информации. В качестве такой информации можно, например, использовать имеющиеся экспериментальные данные по так называемым дальним FB корреляциям (forward-backward correlations) в pp и $p\bar{p}$ взаимодействиях [217]-[220]. Они представляют собой изучение средней множественности заряженных частиц в одном быстротном интервале, скажем, в задней полусфере $\langle B \rangle_F$, как функции множественности частиц в данном событии в другом быстротном интервале, например, в передней полусфере F .

Удивительной особенностью этих данных, полученных в широком интервале энергий на ускорителях ISR, SPS и Fermilab, является то, что они практически идеально могут быть аппроксимированы линейной зависимостью

$$\langle B \rangle_F = a + bF, \quad (6.1)$$

где мерой величины корреляции является коэффициент b ("коэффициент корреляции"). Никаких простых динамических причин, объясняющих наличие такой простой линейной зависимости в широком диапазоне изменения F , на первый взгляд не видно. В этом разделе мы анализируем это поведение в рамках описанного выше двустадийного сценария.

Нашей отправной точкой является допущение, что отдельные излучатели (цветные струны) распадаются согласно пуассоновскому закону. Это предположение косвенно основывается на представлении о струне, как об однородном протяженном объекте в пространстве быстрот. Ее фундаментальным свойством является то, что части струны, относящиеся к различным быстротным интервалам, не взаимодействуют между собой и, следовательно, распадаются независимым образом (за исключением случая, когда они находятся по быстроте на малом расстоянии друг от друга). В пользу этого, видимо, свидетельствует и анализ экспериментальных данных, проведенный, например, в работах [222, 223, 243]). Это проявление так называемого принципа локальности в пространстве быстрот. В этом случае распределения по числу частиц, отвечающие распаду отдельных фрагментов струны разной длины (в пространстве быстрот) должны иметь один и тот же вид, но с разной величиной средней множественности, пропорциональной длине соответствующего фрагмента струны. Простейшим (но не единственным [223]-[225]) распределе-

нием, где этот принцип реализуется, является распределение Пуассона.

Основной результат рассмотрения в настоящем разделе состоит в том, что в самом общем виде удается доказать следующие утверждения. В случае, когда отдельные излучатели распадаются, давая пуассоновское распределение по множественности, ФВ корреляции однозначно связаны с видом результирующего распределения по множественности в переднем быстройном интервале $P(F)$. Если в соответствии с экспериментальными данными потребовать еще, чтобы зависимость $\langle B \rangle_F$ от F была линейной, то это приводит к тому, что это результирующее распределение по множественности в переднем быстройном окне $P(F)$ будет иметь вид отрицательного биномиального распределения, что также согласуется с имеющимися экспериментальными данными [221]. Здесь уместно подчеркнуть, что все ФВ корреляции, которые мы рассматриваем в этой главе, в рамках нашего подхода возникают только благодаря флуктуациям числа (и/или силы) излучателей от события к событию.

Таким образом мы показываем, что линейная зависимость (6.1) для ФВ корреляций возникает, когда пуассоновские распределения отдельных излучателей (в результате их свертки с распределением по числу и силе этих излучателей) преобразуются в результирующее отрицательное биномиальное распределение по множественности $P(F)$. При этом показано, что из одинаковых пуассоновских элементарных излучателей невозможно построить систему с линейной корреляционной функцией. Как мы увидим ниже, такое преобразование возможно лишь при наличии в системе излучателей различной силы, включая в том числе и излучатели с очень малой средней множественностью. Роль таких излучателей в современных струнных моделях могут играть, например, в модели взаимодействующих струн так называемые министруны, возникающие при взаимодействии морских кварков и имеющие малую протяженность в пространстве быстрой [88]. В модели сливающихся струн роль таких излучателей с малой средней множественностью могут играть струны с малой поперечной площадью (см. следующий раздел этой главы).

Чтобы подчеркнуть, что сформулированный выше результат не является тривиальным, упомянем, что в работе [226] рассматривалась альтернативная картина, когда исходное распределение по множественности для отдельных излучателей имело вид отрицательного биномиального распределения, также как и результирующее распределение по множественности. В этом случае, как мы показали в работе [296], зависимость $\langle B \rangle_F$ от F оказывается сильно нелинейной, что противоречит имеющимся экспериментальным данным [217]-[220].

6.1.2 Формализм производящих функций

Рассмотрим сначала N одинаковых элементарных излучателей распределенных с вероятностью $w(N)$. Обозначим через $p(F, B)$ - вероятность обнаружить F частиц в переднем и B частиц в заднем быстротном интервале от одного излучателя. Тогда результирующее распределение по F, B от всех излучателей имеет вид

$$P(F, B) = \sum_N w(N) \sum_{F_i, B_i} \delta_{F, \sum F_i} \delta_{B, \sum B_i} \prod_{i=1}^N p(F_i, B_i) . \quad (6.2)$$

Среднее по всем событиям значение некоторой физической величины A дается

$$\langle A \rangle = \sum_{F, B} A(F, B) P(F, B) . \quad (6.3)$$

Условная вероятность обнаружить B частиц в заднем быстротном окне при условии, что в переднем быстротном окне зарегистрировано F частиц равна

$$P_F(B) = \frac{P(F, B)}{P(F)} . \quad (6.4)$$

Здесь $P(F)$ - вероятность (безусловная) обнаружить F частиц в переднем быстротном интервале:

$$P(F) = \sum_B P(F, B) . \quad (6.5)$$

Согласно (6.4) и (6.5) условное среднее некоторой физической величины A при фиксированном значении F дается отношением

$$\langle A \rangle_F = \frac{\sum_B A(F, B) P(F, B)}{\sum_B P(F, B)} . \quad (6.6)$$

Удобно перейти к формализму производящих функций (ПФ). В этом формализме для каждого распределения вероятностей $p(k)$ ($p(k) \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$) вводится своя ПФ:

$$g(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p(k) z^k .$$

Обратное преобразование дается формулой

$$p(k) = \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) , \quad \text{где} \quad g^{(k)}(0) \equiv \left. \frac{d^k}{dz^k} g(z) \right|_{z=0} \geq 0 \quad (6.7)$$

- значение производных ПФ в нуле. Условие нормировки и средние значения выражаются через производные ПФ при $z = 1$ следующим образом:

$$g(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1 , \quad \bar{k}^n = \left(z \frac{d}{dz} \right)^k g(z) \Big|_{z=1} .$$

В частности,

$$\bar{k} = g'(1) , \quad \bar{k}^2 = g''(1) + g'(1) .$$

Представим теперь символ Кронекера, входящий в формулу (6.2), следующим образом

$$\delta_{m,n} = \int \frac{dx}{2\pi ix} x^{n-m} , \quad (6.8)$$

где контур интегрирования в комплексной плоскости x охватывает начало координат. Используя это соотношение, формулу (6.5) для вероятности можно переписать следующим образом:

$$P(F, B) = \int \frac{dx}{2\pi ix} x^{-F} \int \frac{dy}{2\pi iy} y^{-B} \sum_N w(N) \prod_{i=1}^N \left(\sum_{F_i, B_i} x^{F_i} y^{B_i} p(F_i, B_i) \right) . \quad (6.9)$$

Каждая сумма внутри произведения по $i = 1, \dots, N$ дает ПФ для распределения $p(F, B)$ от одиночного излучателя:

$$g(x, y) = \sum_{F, B} x^F y^B p(F, B) . \quad (6.10)$$

Введем еще $G(x, y)$ - ПФ для результирующего распределения $P(F, B)$:

$$G(x, y) = \sum_{F, B} x^F y^B P(F, B) . \quad (6.11)$$

Ясно, что

$$P(F, B) = \int \frac{dx}{2\pi ix} x^{-F} \int \frac{dy}{2\pi iy} y^{-B} G(x, y) ,$$

и тогда из (6.9) окончательно находим:

$$G(x, y) = \sum_N w(N) g^N(x, y) . \quad (6.12)$$

Условные средние (6.6) при фиксированном значении F легко могут быть выражены через ПФ $G(x, y)$. Для суммы в числителе (6.6) мы имеем:

$$\sum_B A(F, B) P(F, B) = \int \frac{dx}{2\pi ix} x^{-F} \int \frac{dy}{2\pi iy} \sum_B A(F, B) y^{-B} G(x, y) . \quad (6.13)$$

Для того чтобы выполнить суммирование по B , используем следующее представление:

$$\sum_B A(F, B) y^{-B} = A \left(F, -y \frac{\partial}{\partial y} \right) \sum_B y^{-B} = A \left(F, -y \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{y}{y-1} . \quad (6.14)$$

Интегрируя затем по частям по y , находим:

$$\sum_B A(F, B) P(F, B) = \int \frac{dx}{2\pi ix} x^{-F} \int \frac{dy}{2\pi i(y-1)} A \left(F, y \frac{\partial}{\partial y} \right) G(x, y) . \quad (6.15)$$

Беря вычет при $y = 1$, для числителя (6.6) окончательно имеем:

$$\sum_B A(F, B)P(F, B) = \int \frac{dx}{2\pi ix} x^{-F} \left[A \left(F, y \frac{\partial}{\partial y} \right) G(x, y) \right]_{y=1}. \quad (6.16)$$

Для знаменателя (6.6) верна та же формула с заменой $A(F, B)$ на единицу:

$$P(F) = \sum_B P(F, B) = \int \frac{dx}{2\pi ix} x^{-F} G(x, 1). \quad (6.17)$$

Наконец, если усредняемая величина $A(F, B)$ есть просто B , то

$$\sum_B BP(F, B) = \int \frac{dx}{2\pi ix} x^{-F} G'_y(x, 1). \quad (6.18)$$

Это позволяет получить следующее выражение для среднего числа частиц в заднем быстротном интервале $\langle B \rangle_F$ при фиксированном числе частиц F в переднем быстротном интервале:

$$\langle B \rangle_F = \frac{\int dx x^{-F-1} G'_y(x, 1)}{\int dx x^{-F-1} G(x, 1)} = \frac{G_x^{(F)'}(0, 1)}{G_x^{(F)}(0, 1)}. \quad (6.19)$$

В последнем переходе мы вычислили интегралы по вычетам. Выражение $G_x^{(F)'}(0, 1)$ означает, что мы должны вычислить F -кратную производную по x и первую производную по y от функции $G(x, y)$ при $x = 0$ и $y = 1$. Приведем также более простые формулы для безусловных средних и результирующего распределения по множественности в переднем быстротном интервале $P(F)$ (6.17):

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= G'_x(1, 1), & \langle B \rangle &= G'_y(1, 1), & \langle BF \rangle &= G''_{xy}(1, 1), \\ P(F) &= \frac{1}{F!} G_x^{(F)}(0, 1). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Этот формализм может быть непосредственно обобщен на случай, когда элементарные излучатели не тождественны. Обозначим через C определенную конфигурацию из N_C излучателей, нумеруемых индексом $i = 1, 2, \dots, N_C$, все или часть которых различны. Обозначим также через $p_i(F, B)$ - вероятность обнаружить F частиц в переднем и B частиц в заднем быстротном интервале от i -того излучателя. Соответствующую ПФ (6.10) мы обозначим через $g_i(x, y)$. Тогда для ПФ результирующего распределения получаем формулу, являющуюся непосредственным обобщением (6.12):

$$G(x, y) = \sum_C w(C) \prod_{i=1}^{N_C} g_i(x, y), \quad (6.21)$$

где $w(C)$ - вероятность образования данной конфигурации C , и суммирование идет по всем возможным конфигурациям.

6.1.3 Пуассоновские излучатели

Ниже мы будем предполагать, что отдельные излучатели не имеют никаких ФВ корреляций [222, 223, 243], что означает факторизацию как вероятностей, так и их ПФ:

$$p(F, B) = p(F)p(B) , \quad g(x, y) = g(x)g(y) . \quad (6.22)$$

Если считать, что элементарные излучатели это кварк-глюонные струны, то такое предположение является оправданным и отражает принцип локальности в пространстве быстрот. Что касается конкретного вида распределений $p(F)$ и $p(B)$, то мы будем предполагать, что они имеют пуассоновский вид:

$$p(F) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^F}{F!} . \quad (6.23)$$

Очевидно, что соответствующей ПФ является экспонента:

$$g(x, y) = g(x)g(y) , \quad g(x) = e^{\alpha(x-1)} . \quad (6.24)$$

Причина использования пуассоновского распределения для одиночного излучателя уже обсуждалась нами во вводном параграфе 6.1.1 настоящего раздела: она естественным образом возникает из представления о струне, как об однородном протяженном объекте в пространстве быстрот.

В первой части рассмотрения мы временно также будем предполагать, что все элементарные излучатели одинаковы, однако, как мы увидим, в дальнейшем нам придется от этого предположения отказаться. Переходя к ПФ $G(x, y)$ результирующего распределения, мы видим, что она, вообще говоря, не факторизуется. Действительно, используя (6.24), из (6.12) находим

$$G(x, y) = \sum_N w(N) e^{Na(x+y-2)} . \quad (6.25)$$

Единственный случай, когда она факторизуется, отвечает ситуации с фиксированным числом излучателей: $w(N) = \delta_{NN_0}$, в которой ФВ корреляции вообще отсутствуют. Здесь уместно напомнить, что все ФВ корреляции, которые мы рассматриваем в этой главе, в рамках нашего подхода возникают только благодаря флуктуациям числа (и/или силы) излучателей от события к событию.

Как видно из (6.25), использование пуассоновского распределения для отдельные излучателей приводит к тому, что ПФ $G(x, y)$ результирующего распределения зависит только от суммы $x + y$. Как следствие мы имеем:

$$G'_y(x, 1) = G'_x(x, 1) . \quad (6.26)$$

Подставляя это в (6.18) и интегрируя по частям по x , мы можем преобразовать числитель в (6.19) следующим образом:

$$(F + 1) \int \frac{dx}{2\pi i x} x^{-F-1} G(x, 1) = (F + 1) P(F + 1) . \quad (6.27)$$

(или, что то же самое, использовать в числителе (6.19) соотношения: $G_{x y}^{(F)'}(0, 1) = G_x^{(F+1)}(0, 1)$ и (6.20)). В результате мы находим, что в этом случае корреляционная функция $\langle B \rangle_F$ однозначно определяется результирующим распределением по множественности в переднем быстротном окне:

$$\langle B \rangle_F = \frac{(F + 1) P(F + 1)}{P(F)} . \quad (6.28)$$

Отметим сразу, что полученный результат справедлив также и для разных пуассоновских излучателей. Фактически, ключевой точкой в выводе этой формулы является то, что для одиночного пуассоновского излучателя ПФ

$$g_i(x, y) = e^{\alpha_i(x+y-2)} = g_i(x + y) \quad (6.29)$$

зависит только от суммы $x + y$. Ясно, что дальнейшее суммирование по конфигурациям в (6.21) не может изменить это свойство. Поэтому решающее тождество (6.26) и следующий из него результат (6.28) справедливы и в этом случае.

6.1.4 Линейная функция корреляции

Как мы показали в предыдущем параграфе, для пуассоновских элементарных излучателей корреляционная функция $\langle B \rangle_F$ однозначно определяется результирующим распределением по множественности в переднем быстротном окне $P(F)$ согласно формуле (6.28). В этом параграфе, исходя из экспериментальной ситуации [217]-[220], мы используем еще тот факт, что корреляционная функция $\langle B \rangle_F$ является линейной (6.1). В этом случае мы можем переписать (6.28) в виде рекуррентного соотношения для $P(F)$:

$$P(F + 1) = \frac{a + bF}{F + 1} P(F) = \left(b + \frac{c}{F + 1} \right) P(F) , \quad (6.30)$$

где $c \equiv a - b$. Это позволяет, как мы убедимся ниже, полностью определить $P(F)$ (см. также [227]).

Удобно перейти от $P(F)$ к $Q(F)$:

$$P(F) = b^F Q(F) . \quad (6.31)$$

Для $Q(F)$ рекуррентное соотношение (6.30) принимает вид:

$$Q(F + 1) = \left(1 + \frac{\lambda}{F + 1}\right) Q(F) . \quad (6.32)$$

где $\lambda = c/b = a/b - 1$. Решение (6.32) очевидно:

$$Q(F) = Q(0) \prod_{n=1}^F \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) = Q(0) \frac{\Gamma(F + \lambda + 1)}{\Gamma(F + 1)\Gamma(\lambda + 1)} , \quad (6.33)$$

где мы выразили произведение по n через гамма-функцию. В результате для распределения $P(F)$ имеем:

$$P(F) = P(0) b^F \frac{\Gamma(F + \lambda + 1)}{\Gamma(F + 1)\Gamma(\lambda + 1)} , \quad (6.34)$$

где $P(0)$ определяется из условия нормировки, причем для нормируемости необходимо выполнение условия $b < 1$.

Легко убедиться, что (6.34) представляет собой ничто иное как отрицательное биномиальное распределение (NBD - negative binomial distribution) со средним значением $\langle F \rangle$ и параметром k , которые связаны с исходными параметрами a и b , входящими в корреляционную функцию $\langle B \rangle_F$ (6.1), следующим образом:

$$b = \frac{\langle F \rangle}{\langle F \rangle + k} , \quad k = \lambda + 1 = \frac{a}{b} . \quad (6.35)$$

Действительно ПФ NBD может быть записана в следующем виде:

$$G_{NBD}(z) = (1 - b)^k (1 - bz)^{-k} = \sum_F P_{NBD}(F) z^F , \quad (6.36)$$

при этом само NBD имеет вид

$$P_{NBD}(F) = (1 - b)^k b^F C_{F+k-1}^{k-1} , \quad (6.37)$$

где

$$C_{F+k-1}^{k-1} \equiv \frac{\Gamma(F + k)}{\Gamma(F + 1)\Gamma(k)} . \quad (6.38)$$

Как ясно из (6.36) условие нормировки выполнено:

$$\sum_F P_{NBD}(F) = G_{NBD}(1) = 1 ,$$

при этом нормировочный коэффициент $P(0)$ в (6.34) оказывается равен

$$P(0) = P_{NBD}(0) = G_{NBD}(0) = (1 - b)^k = (1 - b)^{\lambda+1} .$$

Среднее значение множественности для NBD равно

$$\langle F \rangle = G'_{NBD}(1) = kb/(1 - b) , \quad (6.39)$$

что ведет к (6.35). Видим, что NBD может быть полностью задано двумя параметрами: средней множественностью $\langle F \rangle$ и параметром k .

Таким образом мы видим, что предположение о пуассоновском характере элементарных излучателей вкупе с наблюдающимся на эксперименте линейным видом корреляционной функции $\langle B \rangle_F$ (6.1) однозначно ведет к результирующему распределению по множественности $P(F)$, имеющему вид NBD. Однако, чтобы окончательно убедиться в этом результате, необходимо еще проверить, что мы можем получить NBD, сворачивая согласно (6.21) пуассоновские распределения для элементарных излучателей с физически допустимым распределением $w(C)$ по конфигурациям этих излучателей.

6.1.5 Отрицательное биномиальное распределение из пуассоновского распределения

Мы начнем этот параграф с того, что покажем, что для случая когда все пуассоновские элементарные излучатели одинаковы, не существует никакого физически допустимого распределения $w(N)$ по числу этих излучателей, свертка (6.12) с которым приводила бы к NBD для результирующего распределения по множественности $P(F)$.

Действительно, в случае когда все излучатели одинаковы, аналогично тому как мы поступали при выводе формулы (6.12), но ограничиваясь рассмотрением распределения по множественности только в переднем быстройном окне, легко получить следующее выражение для ПФ результирующего распределения по множественности:

$$G(z) = \sum_N w(N)g^N(z) , \quad (6.40)$$

где $g(z)$ - ПФ для элементарного излучателя. Если ввести еще ПФ $H(z)$ для распределения $w(N)$ по числу излучателей:

$$H(z) = \sum_N w(N)z^N , \quad (6.41)$$

то можно переписать (6.40) следующим образом:

$$G(z) = H(g(z)) . \quad (6.42)$$

Ясно, что в этом случае, зная $G(z)$ и $g(z)$, мы можем однозначно восстановить вид $H(z)$. Действительно, решая уравнение $g = g(z)$ относительно

z , можно выразить $z = z(g)$, подставляя это в (6.42), находим:

$$H(g) = G(z(g)) . \quad (6.43)$$

Однако, чтобы функция $H(z)$ могла быть ПФ вероятностного распределения, все ее производные в нуле должны существовать и быть неотрицательными (см. (6.7)).

Применим эти соображения к нашему случаю, когда ПФ для элементарного излучателя $g(z)$ соответствует распределению Пуассона (6.24), а ПФ для результирующего распределения по множественности $G(z)$ имеет вид NBD (6.36). Обращая (6.24), имеем

$$z = 1 + \frac{1}{\alpha} \ln g . \quad (6.44)$$

Используя теперь (6.36) и (6.43), находим

$$H(g) = (1 - b)^k \left[1 - b \left(1 + \frac{1}{\alpha} \ln g \right) \right]^{-k} = \left[1 - \frac{b}{\alpha(1 - b)} \ln g \right]^{-k} . \quad (6.45)$$

Эта функция, однако, не может быть ПФ для распределения по числу излучателей (6.41), поскольку она неаналитична при $g = 0$, и все ее производные в начале координат обращаются в бесконечность.

Таким образом мы приходим к выводу, что из одинаковых пуассоновских элементарных излучателей невозможно построить систему с линейной корреляционной функцией (6.1). Это, однако, удастся сделать для системы различных излучателей, в частности, непрерывно распределенных по их средним значениям α_i . В самом деле, в случае различных пуассоновских излучателей согласно формуле аналогичной (6.21) для ПФ $G(z)$ результирующего распределения по множественности в переднем окне $P(F)$ мы имеем:

$$G(z) = \sum_C w(C) \prod_{i=1}^{N_C} e^{\alpha_i(z-1)} = \sum_C w(C) e^{\alpha(C)(z-1)} , \quad (6.46)$$

где

$$\alpha(C) = \sum_{i=1}^{N_C} \alpha_i \quad (6.47)$$

имеет смысл средней множественности в переднем быстротном интервале от данной конфигурации излучателей C . Выражение, которое усредняется по конфигурациям в (6.46), зависит только от $\alpha(C)$. Предполагая, что оно изменяется непрерывным образом, можно переписать (6.46) следующим образом:

$$G(z) = \int_0^\infty d\alpha w(\alpha) e^{\alpha(z-1)} , \quad (6.48)$$

где $w(\alpha) > 0$ теперь имеет смысл вероятности возникновения любой конфигурации излучателей, характеризующейся средней множественностью α (после суммирования по всем подконфигурациям, имеющим данную среднюю множественность α в переднем интервале). Нормировочное условие для нее имеет вид:

$$\int_0^{\infty} d\alpha w(\alpha) = 1 . \quad (6.49)$$

Теперь мы легко можем явно построить $w(\alpha)$, которая ведет к результирующему NBD. Беря $w(\alpha)$ в виде известного гамма-распределения:

$$w(\alpha) = \frac{\gamma^k}{\Gamma(k)} \alpha^{k-1} e^{-\gamma\alpha} , \quad (6.50)$$

из (6.46) получаем

$$G(z) = \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1 - z} \right)^k = (1 - b)^k (1 - bz)^{-k} , \quad (6.51)$$

где

$$\gamma = 1/b - 1 .$$

То есть мы действительно получаем NBD (6.36). Из вывода видно, что решающую роль в устранении сингулярности, имевшей место в случае с одинаковыми пуассоновскими излучателями, играет вклад от интегрирования по области малых α вплоть до $\alpha = 0$. Физически, как мы уже упоминали в первом параграфе настоящего раздела, это подразумевает существование излучателей (струн) с очень малыми средними множественностями.

В заключение этого параграфа заметим, что конструкция аналогичная (6.48) с (6.50) была использована в генераторе событий VENUS [228, 229], чтобы получить реалистичное NBD для p -А спектров.

Таким образом в картине, где пуассоновские излучатели различны и могут иметь очень малую среднюю множественность, удается подобрать их распределение таким образом, чтобы результирующее распределение по множественности оказалось NBD (что соответствует эксперименту, см. ниже), при этом функция ФВ корреляций оказывается строго линейной в согласии с эмпирической формулой (6.1), а коэффициент корреляции b связан согласно (6.35) с параметрами этого результирующего NBD.

6.1.6 Сравнение с экспериментом. Обсуждение

Переходя к сравнению с экспериментальными данными [217]-[220] по дальним ФВ корреляциям множественности в pp и $p\bar{p}$ столкновениях, не-

обходимо прежде всего подчеркнуть, что наблюдаемая величина коэффициента корреляции b сильно зависит от выбора быстрой интервалов. Коэффициент корреляции существенно убывает с увеличением зазора между передним и задним быстрой окнами. На первый взгляд, очевидной причиной такого поведения в струнной модели является выключение короткодействующих корреляций в соответствии с принципом локальности в пространстве быстрой. Однако, тот факт, что b продолжает убывать при увеличении зазора с 4,37 до 5,43 единиц быстрой [220], показывает, что эта причина не может быть единственной.

Другой причиной, которая может играть роль в случае больших зазоров между окнами, является конечная, флуктуирующая от события к событию, длина струн (закон сохранения энергии) и наличие асимметричных по быстрой струн (например, между валентным кварком и морским антикварком), фрагментация которых дает вклад в образование частиц лишь в одном из наблюдательных окон. С этой точки зрения находит объяснение и наблюдающийся в экспериментах [217]-[220] рост коэффициента корреляции с увеличением начальной энергии при фиксированной величине зазора между передним и задним быстрой окнами. Поскольку струны, образованные валентными кварками и дикварками, с ростом энергии становятся длиннее, то их фрагментация с большей вероятностью дает вклад в оба наблюдательных окна, даже при большой величине быстрой зазора.

В любом случае, переходя к более детальному сравнению наших предсказаний с экспериментальными данными [217]-[221], мы должны иметь в виду, что величина FV корреляций зависит от выбора быстрой окон и, следовательно, мы должны проводить свой анализ для каждого конкретного их выбора в отдельности. Мы также попытаемся учесть, что большинство (если не все) частиц рождаются в результате распада резонансов (кластеров), образующихся при фрагментации кусков струны. В этом разделе мы будем предполагать, что наши величины F и V относятся не к числу наблюдаемых частиц, а скорее к числу объектов возникающих непосредственно при распаде струны. Подобно тому как это делается в большинстве других подходов [230, 231], мы тогда должны ввести среднее число r наблюдаемых частиц, приходящихся на один непосредственно рожденный объект (резонанс или кластер). Наблюдаемое число частиц в переднем n_F и заднем n_V быстрой окнах тогда будет просто связано с нашими переменными: $n_F = rF$ и $n_V = rV$, при этом как ясно из (6.1) между $\langle n_V \rangle_{n_F}$ и n_F сохранится линейная зависимость с тем же коэффициентом корреляции b .

Чтобы избавиться от короткодействующих корреляций, вызванных

Энергия (ГэВ)	300	546	1000	1800
b	0.252 ± 0.044	0.376 ± 0.033	0.381 ± 0.0021	0.501 ± 0.008

Таблица 6.1: Экспериментальные значения [220] корреляционного параметра b для симметричных быстройных интервалов, задаваемых соотношением (6.52)

распадом резонансов (кластеров) необходимо выбрать достаточно большую величину зазора между наблюдательными окнами, как показывают оценки [91] не менее, чем $1,5 \div 2,0$ единицы быстроты. С этой точки зрения экспериментальные данные, относящиеся к передней и задней полусферам целиком, не подходят для анализа. С другой стороны, как ясно из приведенных выше соображений, нельзя выбирать наблюдательные окна и в областях фрагментации сталкивающихся частиц, так как в этом случае будет мало излучателей (достаточно длинных струн) дающих вклад одновременно в оба окна. Это означает, что мы должны по крайней мере на 2 единицы быстроты отступить от кинематических границ. При существующих энергиях эти условия практически однозначно определяют удобные для анализа быстройные окна.

Кроме того мы должны принять во внимание, что формулировка наших результатов наряду со знанием коэффициента ФВ корреляции b предполагает одновременное знание и распределения по множественности в переднем быстройном окне. Сравнивая результаты экспериментов [220] и [221], мы находим только один выбор окон по быстроте

$$2,18 < |\eta| < 3,25, \quad (6.52)$$

в которых с одной стороны был измерен коэффициент корреляции b в эксперименте [220], а с другой стороны они покрываются двумя быстройными интервалами одинаковой длины

$$2,5 < |\eta| < 3,5 \quad \text{и} \quad 2,0 < |\eta| < 3,0, \quad (6.53)$$

для которых в эксперименте [221] были изучены распределения по множественности.

Данные [220] по ФВ корреляциям в симметричных окнах, задаваемых соотношением (6.52), согласуются с линейной формой (6.1). Соответствующие значения корреляционного параметра b приведены в таблице 6.1 для случая различных начальных энергий в с.ц.и. Что касается распределений по множественности в двух быстройных интервалах (6.53), то в [221] показано, что они хорошо описываются NBD с параметрами приведенными в таблице 6.2 для случая начальных энергий 200 и 900 ГэВ

Энергия(ГэВ)	интервал η	$\langle F \rangle$	k
200	2.0 – 3.0	2.40 ± 0.03	$2.01 \pm 0.07 \pm 0.10$
200	2.5 – 3.5	2.14 ± 0.03	$2.2 \pm 0.1 \pm 0.1$
900	2.0 – 3.0	3.72 ± 0.05	$2.2 \pm 0.1 \pm 0.1$
900	2.5 – 3.5	3.41 ± 0.05	$2.2 \pm 0.1 \pm 0.1$

Таблица 6.2: Экспериментальные значения [221] параметров NBD в быстройных интервалах, задаваемых соотношением (6.53)

в с.ц.и. Как мы видим из сравнения этих таблиц, быстройные окна и начальные энергии для этих двух наборов данных перекрываются, но не совпадают. Поэтому ниже мы будем использовать в качестве параметров NBD для интервала (6.52) значения, полученные усреднением по двум интервалам (6.53). Мы будем также использовать параметры из таблицы 6.1, относящиеся к энергиям 200 и 900 ГэВ, для описания b при энергиях 300 и 1000 ГэВ, соответственно.

В нашей картине связь между коэффициентом корреляции b в формуле (6.1) и параметрами NBD распределения по множественности (6.37) в переднем окне дается формулой (6.35), в которой среднее $\langle F \rangle$ относится к непосредственно образующимся частицам. Переходя к наблюдаемым частицам, мы можем переписать эту формулу следующим образом:

$$b = \frac{\langle n_F \rangle}{\langle n_F \rangle + rk}, \quad (6.54)$$

где r - число наблюдаемых частиц, приходящихся на одну первичную. Экспериментальные данные, приведенные в таблицах 6.1 и 6.2, позволяют извлечь значение r для быстройного окна (6.52) при двух энергиях: 200 и 900 ГэВ в с.ц.и.

$$\begin{aligned} r &= 3,22 \pm 0,68, & \sqrt{s} &= 200 \text{ GeV}, \\ r &= 2,63 \pm 0,52, & \sqrt{s} &= 900 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Отметим, что большие погрешности здесь возникают из-за экспериментальных погрешностей определения b и фитирования k . На основе полученных данных трудно сделать определенный вывод относительно изменения r с энергией. Они, в частности, совместимы с r вообще независимым от энергии.

Если на время забыть о приведенных выше аргументах о необходимости наличия зазора между наблюдательными окнами и проанализировать экспериментальные данные, относящиеся к передней и задней

Энергия(ГэВ)	r , (6.54)	r , (6.56) [220]
300	2.86 ± 0.29	2.27 ± 0.24
546	2.73 ± 0.26	2.31 ± 0.19
1000	3.11 ± 0.30	2.65 ± 0.25
1800	2.96 ± 0.21	2.64 ± 0.16

Таблица 6.3: Число рожденных частиц (r) на один кластер

полусферам целиком, то удастся восстановить значения r с меньшими погрешностями. Они приведены при различных начальных энергиях в первых двух колонках таблицы 6.3. Никакой зависимости r от энергии из нее также не видно.

Упомянем, что в литературе FВ корреляции изучались, главным образом, как раз целиком в передней и задней полусферах в рамках предположения Чу и Янга [230] о том, что распределение по множественности в этих быстройных интервалах дается произведением двух множителей. Основываясь на чисто феноменологических соображениях, Чу и Янг предположили, что первый множитель представляет собой NBD по общей множественности $n = n_F + n_B$ рожденных частиц, а второй множитель дается биномиальным распределением по разности множественностей в передней и задней полусферах $z = n_F - n_B$ с коэффициентом пропорциональным $C_{n/r}^{n_F/r}$, где r - число наблюдаемых частиц на один кластер. Основываясь на этих предположениях, в работе [231] путем численных расчетов было показано, что результирующая корреляционная функция (6.1) оказывается близка к линейной. Причем в этом подходе коэффициент корреляции b выражается через общую среднюю множественность $\langle n \rangle$ следующим образом:

$$b = \frac{\langle n \rangle + k - r}{\langle n \rangle + k + r}. \quad (6.56)$$

Сравнивая эту формулу с экспериментальными результатами, авторы работы [220] определили значение параметра r при нескольких значениях энергии. Мы приводим эти результаты для сравнения в последней колонке таблицы 6.3. Как видно из таблицы, эти результаты близки к нашим, хотя значения r с использованием (6.56) получаются несколько меньше и имеют тенденцию к росту с увеличением энергии.

Сравнивая этот подход с нашим, хотелось бы прежде всего отметить, что наш сценарий с пуассоновскими излучателями (струнами) автоматически ведет к распределению по разности испущенных частиц $z = F - B$

биномиального вида при фиксированном общем числе испущенных частиц $n = F + B$. В самом деле, на языке ПФ $G(x, y)$ (6.11) переход от переменных F и B к переменным n и z соответствует переходу в $G(x, y)$ от переменных x и y к u и v согласно $x = uv$ и $y = u/v$. ПФ $G(u, v)$ связана с распределением $P(n, z)$ следующим образом:

$$G(u, v) = \sum_n \sum_{z=-n}^n P(n, z) u^n v^z, \quad (6.57)$$

где суммирование во второй сумме по z ведется через две единицы. Как мы убедились выше в параграфе 6.1.3, для пуассоновских элементарных излучателей ПФ имеет вид $G(x, y) = G(x + y)$. В этом случае

$$G(x + y) = \sum_n \frac{a(n)}{2^n} (x + y)^n = \sum_n \frac{a(n)}{2^n} u^n \sum_{z=-n}^n C_n^{(n+z)/2} v^z. \quad (6.58)$$

Нормировочное условие согласно (6.11) дает

$$\sum_{F, B} P(F, B) = G(1, 1) = \sum_n a(n) = 1.$$

Сравнивая (6.57) и (6.58), видим, что

$$P(n, z) = (1/2)^n a(n) C_n^{(n+z)/2} = (1/2)^n a(n) C_n^F, \quad (6.59)$$

а результирующее распределение по n дается

$$P(n) = \sum_{z=-n}^n P(n, z) = a(n). \quad (6.60)$$

Деля (6.59) на (6.60), мы получаем распределение по z при фиксированном n , которое оказывается пропорциональным C_n^F . Таким образом это формальное предположение Чу и Янга получает конкретную реализацию в нашей схеме. Поскольку линейное поведение корреляционной функции (6.1) в нашей модели является точным, то нам представляется естественным, что оно путем численных расчетов воспроизводится и в работе [231], выполненной в рамках предположений Чу и Янга [230].

Тем не менее отметим, что между этими двумя подходами остается количественное различие. Видно, что при $r \neq k$ окончательные формулы (6.35) и (6.56) для коэффициента корреляции b с учетом того, что мы рассматриваем все фазовое пространство и, следовательно, $\langle n \rangle = 2\langle F \rangle$, остаются различными. Они совпадают только при $r = k$. Как результат наши значения для r оказываются систематически выше, чем полученные в работе [220] в рамках подхода Чу и Янга (ср. последние два столбца в таблице 6.3). С другой стороны значения, полученные в рамках нашего

подхода, практически не зависят от начальной энергии, тогда как значения, полученные в [220], имеют тенденцию к росту, поэтому разность между ними уменьшается с ростом энергии.

Легко можно проследить причину возникновения этого различия. Оно связано со способом, которым распределение по кластерам преобразуется в распределение по числу наблюдаемых частиц. В обоих подходах это преобразование производится приближенным образом. В чисто феноменологическом подходе Чу и Янга, просто исходя из экспериментальных данных, в качестве распределения по числу наблюдаемых частиц выбирается NBD. Однако, это допущение не соответствует другому их предположению о том, что все наблюдаемые частицы образуются от распада кластеров, каждый из которых распадается в среднем на r частиц. Это несоответствие особенно просто увидеть, если на секунду предположить, что каждый кластер распадается ровно на r частиц. В этом случае есть возможность с ненулевой вероятностью наблюдать только $r, 2r, 3r, \dots$ частиц и, следовательно, распределение не может быть NBD по n . Оно скорее является NBD по числу кластеров (n/r), что и предполагается в нашем подходе, с соответствующим продолжением на нецелые значения аргумента. Это, разумеется, также является всего лишь некоторым приближением.

В заключение заметим, что в настоящем разделе мы ограничились изучением процесса дальних FВ корреляций, исходя из самых общих предположений о двустадийном характере процесса образования мягких частиц в адронных столкновениях. Введение в следующем разделе этой главы конкретного динамического механизма рождения частиц в рамках модели взаимодействующих струн позволяет получить более детальное описание этих корреляций, не прибегая к формальным допущениям, которые делались в работе [230] и затем использовались в работах [220, 231].

6.2 Вычисление асимптотик коэффициентов корреляции в рамках простого дискретного аналога модели взаимодействующих цветных струн

6.2.1 Введение. Модель слияния цветных струн

Как мы уже упоминали в предыдущем разделе для описания мягкой составляющей адронных и ядерных взаимодействий при высоких энергиях широко используется модель цветных струн [86, 87, 88]. В исходном варианте модели процессы фрагментации струн, образовавшихся на первом этапе, протекают независимо, и наблюдаемая мягкая часть спектра

адронов просто равна сумме спектров от отдельных струн.

Ясно, что в случае ядро-ядерных столкновений с ростом энергии и атомного номера сталкивающихся ядер растет и число образующихся кварк-глюонных струн, и, начиная с какого-то момента, становится необходимым учет взаимодействия между ними. Один из возможных подходов к этой проблеме был предложен в модели сливающихся цветных струн [89]-[91]. В этой модели было отмечено, что поскольку цветные струны имеют некоторый конечный размер в поперечной плоскости, то с ростом плотности струн они неизбежно начинают перекрываться. При этом происходит взаимодействие напряженностей цветных полей этих струн, что в свою очередь меняет процесс их фрагментации в адроны, по сравнению с фрагментацией в модели независимых первичных струн.

Как отмечалось в работе [85], подход, основанный на учете возможности слияния цветных струн в ядро-ядерных взаимодействиях при высоких энергиях, тесно связан с активно исследуемой в последнее время проблемой насыщения ядерной партонной плотности в КХД [58]-[71] как в рамках теории жесткого померона Балицкого-Фадиана-Кураева-Липатова предложенной и развитой в работах [72]-[78], так и в альтернативной технике, так называемого, "конденсата цветных стекол" (colour glass condensate), в котором рассматривается взаимодействие цветного диполя-пробника с глюонным полем, созданным быстро движущимся ядром [79]-[84].

Отметим также, что при очень высокой плотности струн происходит многократное перекрытие струн друг с другом и образование единого кластера в поперечной плоскости. В принципе, как считают авторы [232]-[235], после термализации такого струнного кластера возможно возникновение кварк-глюонной плазмы.

Что касается более явных экспериментальных следствий, то как было показано еще в первых работах [89], учет слияния струн резко снижает множественность заряженных частиц в центральной области с примерно 8000 до 2000-3000 на единицу быстроты для центральных PbPb-столкновений при энергиях LHC. Этот эффект был получен позднее и в ряде других моделей (см. [236]). Одновременно, эффект слияния струн ведет к увеличению значения среднего поперечного импульса (см. детали в [237]). Сравнение этих предсказаний с первыми экспериментальными результатами RHIC показывает их хорошее согласие [238, 239].

При последующем развитии [90, 232, 233] эта модель была приложена к описанию дальних корреляций множественности и p_t^2 в релятивистских ядерных столкновениях [91, 235, 237, 296, 297], [300]-[303],[306].

В соответствии с общей идеей Швингера [240] и последующих работ

[241, 242] ('colour ropes model') были изучены два возможных варианта слияния струн.

В первом варианте модели [235, 237] предполагалось, что цветные поля складываются только локально - в областях перекрытия струн в поперечной плоскости. Поэтому этот вариант обычно называют локальным слиянием (local fusion) или случаем с локальным перекрытием струн (overlaps). В этом случае

$$\langle n \rangle_k = \mu_0 \frac{S_k}{\sigma_0} \sqrt{k}, \quad \langle p_t^2 \rangle_k = \overline{p^2} \sqrt{k}. \quad (6.61)$$

Здесь $\langle n \rangle_k$ - средняя множественность заряженных частиц, испускаемых в заданном быстротном интервале из области с поперечной площадью S_k , где произошло перекрытие k цветных струн, а $\langle p_t^2 \rangle_k$ - средний квадрат поперечного импульса этих частиц. μ_0 и $\overline{p^2}$ - средняя множественность и средний квадрат поперечного импульса заряженных частиц, рождающихся в этом быстротном интервале от распада одиночной струны, σ_0 - ее поперечная площадь.

Во втором варианте модели [238, 243] предполагалось, что цветные поля складываются 'глобально' - по всей поперечной площади каждого кластера, образующегося при перекрытии струн - в одно общее для данного кластера цветное поле. Ясно, что это соответствует сложению цветных зарядов источников. Этот вариант называют глобальным слиянием (global fusion) или случаем с образованием струнных кластеров (clusters). В этом случае

$$\langle n \rangle_{cl} = \mu_0 \frac{S_{cl}}{\sigma_0} \sqrt{k_{cl}}, \quad \langle p_t^2 \rangle_{cl} = \overline{p^2} \sqrt{k_{cl}}, \quad k_{cl} = \frac{N_{cl}^{str} \sigma_0}{S_{cl}}. \quad (6.62)$$

Здесь $\langle n \rangle_{cl}$ - средняя множественность заряженных частиц, испускаемых в заданном быстротном интервале кластером с поперечной площадью S_{cl} , а $\langle p_t^2 \rangle_{cl}$ - средний квадрат поперечного импульса этих частиц. N_{cl}^{str} - число струн, формирующих кластер.

Заметим, что в двух предельных случаях оба эти рецепта совпадают. Действительно, для конфигурации из N неперекрывающихся струн в варианте с локальным слиянием находим: $k = 1$, $S_1 = N\sigma_0$, $\langle n \rangle = \langle n \rangle_1 = N\mu_0$ и $\langle p_t^2 \rangle = \langle p_t^2 \rangle_1 = \overline{p^2}$. В варианте с глобальным слиянием в этой конфигурации мы имеем N "кластеров", каждый из которых состоит только из одной струны, поэтому $k_{cl} = 1$, $\langle n \rangle = N\langle n \rangle_{cl} = N\mu_0$ и $\langle p_t^2 \rangle = \langle p_t^2 \rangle_{cl} = \overline{p^2}$, что совпадает с результатом для случая локального слияния.

Для конфигурации из N полностью перекрывшихся струн в варианте с локальным слиянием находим: $k = N$, $S_N = \sigma_0$, $\langle n \rangle = \langle n \rangle_N = \mu_0 \sqrt{N}$ и

$\langle p_t^2 \rangle = \langle p_t^2 \rangle_N = \overline{p^2} \sqrt{N}$. В варианте с глобальным слиянием в этой конфигурации мы имеем один кластер, сформированный N струнами, и площадь которого равна площади одной струны $S_{cl} = \sigma_0$, поэтому $k_{cl} = N$, $\langle n \rangle = \langle n \rangle_{cl} = \mu_0 \sqrt{N}$ и $\langle p_t^2 \rangle = \langle p_t^2 \rangle_{cl} = \overline{p^2} \sqrt{N}$, что опять совпадает с результатом для случая локального слияния.

Таким образом, в обоих вариантах модели (локальном (overlaps) и глобальном (clusters)) при переходе от конфигурации с N неперекрывающимися струнами к конфигурации с N полностью перекрывшимися струнами средняя множественность убывает от $\langle n \rangle = \mu_0 N$ до $\langle n \rangle = \mu_0 \sqrt{N}$, а средний квадрат поперечного импульса возрастает от $\langle p_t^2 \rangle = \overline{p^2}$ до $\langle p_t^2 \rangle = \overline{p^2} \sqrt{N}$.

6.2.2 Дальние корреляции

Определение коэффициентов корреляции

Идея [91, 235, 237] использовать дальние корреляции для обнаружения эффекта слияния цветных струн основывается на том соображении, что кварк-глюонная струна является протяженным объектом, дающим при своей фрагментации вклад в широкий интервал быстрот. Это позволяет ожидать появления дальних (в пространстве быстрот) корреляций между величинами наблюдаемыми в удаленных друг от друга по рапидити окнах. Экспериментально, в системе центра масс, эти удаленные по рапидити окна обычно выбирают в разных полусферах вылета вторичных частиц - одно в передней, а другое в задней. Поэтому такие дальние корреляции, называют еще корреляциями "вперед-назад" или FB-корреляциями (forward-backward correlations). В принципе можно изучать три типа таких дальних корреляций:

n - n - корреляции между множественностью заряженных частиц в этих быстротных интервалах,

p_t - p_t - корреляции между поперечными импульсами в этих интервалах и

p_t - n - корреляции между поперечным импульсом в одном быстротном интервале и множественностью заряженных частиц в другом.

Обычно, чтобы характеризовать эти корреляции численно, изучается среднее значение $\langle B \rangle_F$ одной динамической переменной B "заднем" быстротном окне Δy_B , как функция величины другой динамической переменной F в "переднем" быстротном окне Δy_F . Здесь знак $\langle \dots \rangle_F$ означает усреднение по всем событиям, для которых величина F в переднем окне

имеет определенное заданное значение, знаком же $\langle \dots \rangle$ мы будем обозначать усреднение по всем событиям вообще. Таким образом мы приходим к понятию корреляционной функции:

$$\langle B \rangle_F = f(F) . \quad (6.63)$$

Коэффициент корреляции естественно определить тогда, как реакцию $\langle B \rangle_F$ на отклонение величины F от своего среднего значения $\langle F \rangle$. При этом удобно также перейти к относительным величинам, т.е. измерять отклонение F от $\langle F \rangle$ в долях $\langle F \rangle$, и тоже самое для B . Поэтому разумно дать следующее определение коэффициента корреляции b_{B-F} между величинами B и F в заднем и переднем окне:

$$b_{B-F} \equiv \frac{\langle F \rangle}{\langle B \rangle} \frac{d\langle B \rangle_F}{dF} \Big|_{F=\langle F \rangle} . \quad (6.64)$$

В качестве динамических переменных в нашей работе мы используем множественность заряженных частиц (n), рожденных в данном событии в заданном быстротном интервале и среднее (*в данном событии!*) значение их поперечного импульса (p_t), т.е. сумму модулей поперечных импульсов всех заряженных частиц, рожденных в данном событии в заданном быстротном интервале Δy , деленную на число этих частиц:

$$p_t \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathbf{p}_{ti}|, \quad \text{где} \quad y_i \in \Delta y ; \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.65)$$

Соответственно, мы можем определить три корреляционных коэффициента:

$$b_{n-n} \equiv \frac{\langle n_F \rangle}{\langle n_B \rangle} \frac{d\langle n_B \rangle_{n_F}}{dn_F} \Big|_{n_F=\langle n_F \rangle} , \quad (6.66)$$

$$b_{p_t-p_t} \equiv \frac{\langle p_{tF} \rangle}{\langle p_{tB} \rangle} \frac{d\langle p_{tB} \rangle_{p_{tF}}}{dp_{tF}} \Big|_{p_{tF}=\langle p_{tF} \rangle} , \quad (6.67)$$

$$b_{p_t-n} \equiv \frac{\langle n_F \rangle}{\langle p_{tB} \rangle} \frac{d\langle p_{tB} \rangle_{n_F}}{dn_F} \Big|_{n_F=\langle n_F \rangle} . \quad (6.68)$$

где n_B и n_F есть значения множественности, а p_{tB} и p_{tF} - средние (*для данного события!*) значения поперечного импульса заряженных частиц, рожденных в данном событии (6.65) соответственно в заднем Δy_B и переднем Δy_F быстротном интервалах.

С технической точки зрения иногда бывает удобнее в качестве динамической переменной использовать не среднее значение (6.65) поперечного

импульса всех частиц, рожденных в данном событии в данном интервале быстроты, а среднее значение квадратов этих импульсов:

$$p_{tF}^2 \equiv \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{p}_{tiF}^2 \quad \text{и} \quad p_{tB}^2 \equiv \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} \mathbf{p}_{tiB}^2, \quad (6.69)$$

соответственно, для переднего Δy_F и заднего Δy_B быстроечных окон. Поэтому ниже, наряду с (6.66)-(6.68), мы будем также рассматривать корреляционные коэффициенты:

$$b_{p_t^2-n} \equiv \frac{\langle n_F \rangle}{\langle p_{tB}^2 \rangle} \left. \frac{d\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}}{dn_F} \right|_{n_F=\langle n_F \rangle} \quad \text{и} \quad b_{p_i^2-p_i^2} \equiv \frac{\langle p_{tF}^2 \rangle}{\langle p_{tB}^2 \rangle} \left. \frac{d\langle p_{tB}^2 \rangle_{p_{tF}^2}}{dp_{tF}^2} \right|_{p_{tF}^2=\langle p_{tF}^2 \rangle} \quad (6.70)$$

Определенные выше корреляционные функции (6.63) не следует путать с так называемыми парными корреляционными функциями, которые обычно вводятся при изучении двухчастичных парных корреляций и которые могут быть извлечены из дважды инклюзивных сечений рождения. Как ясно из (6.65) и (6.69), для нахождения корреляционной функции (6.63) знания парных корреляций недостаточно.

n-n корреляции

Что касается корреляций множественности, то для случая pp и $p\bar{p}$ столкновений такие дальние FB $n-n$ корреляции уже довольно давно изучались как экспериментально [217]-[220], так и теоретически [91, 226, 230, 231, 244, 245], в том числе и в наших работах [296, 297]. Как мы уже отмечали (см. раздел 6.1 настоящей главы), наиболее интересной особенностью этих экспериментальных данных, полученных при энергиях ISR, SPS и Fermilab является то, что они практически идеально могут быть представлены линейной зависимостью во всей области изменения n_F (см. формулу (6.1)):

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = a + b n_F, \quad (6.71)$$

При симметрично выбранных быстроечных интервалах $\Delta y_B = -\Delta y_F$ мы имеем $\langle n_B \rangle = \langle n_F \rangle$, и коэффициент корреляции b_{n-n} (6.66) равен коэффициенту b в формулах (6.71) и (6.1): $b_{n-n} = b$. Зависимость этого коэффициента от начальной энергии и выбора быстроечных интервалов наблюдения проанализирована в цитированных выше работах.

Ожидалось также [91], что для случая ядро-ядерных столкновений такие дальние $n-n$ корреляции могут служить источником информации о числе излучающих центров и как следствие о процессе слияния струн. Однако, позже было показано [235], что при ядерных столкновениях $n-n$ корреляции, возникающие из-за слияния струн, сильно затенены $n-n$

корреляциями, возникающими из-за флуктуаций начального числа струн даже при фиксированном значении прицельного параметра. Чтобы избежать этой трудности в работах [235, 237, 246] предлагалось перейти от изучения корреляций между экстенсивными наблюдаемыми (такими как множественность) к изучению корреляций между интенсивными наблюдаемыми (такими как, например, поперечный импульс).

p_t - p_t корреляции

Изучение корреляций между поперечными импульсами отдельных частиц в разных быстройных интервалах было начато в работе [237]. Однако, в работе [302] в результате вычислений нами было обнаружено, что величина таких 'дважды инклюзивных', парных корреляций между поперечными импульсами отдельных частиц стремится к нулю с ростом числа струн и поэтому чрезвычайно мала для случая реалистических ядро-ядерных столкновений.

Позже мы показали [306, 307], что если в качестве динамической переменной использовать не поперечный импульс отдельной частицы, а среднее (в данном событии!) значение поперечного импульса (p_t) всех заряженных частиц рожденных в данном событии в заданном быстройном интервале (6.65), как это было предложено в работах [309]-[311], то такие p_t - p_t корреляции (6.67) и (6.70) между средними величинами поперечного импульса всех частиц, испущенных в данном событии в двух разных по быстройности интервалах (6.69), не стремятся к нулю с ростом числа струн и могут быть обнаружены в реалистических ядерных столкновениях.

p_t - n корреляции

В работах [297, 309, 310] было также предложено изучать смешанные p_t - n корреляции, т.е. корреляции между средним поперечным импульсом всех заряженных частиц в одном быстройном интервале и множественностью заряженных частиц в другом.

Для pp и $p\bar{p}$ столкновений p_t - n корреляции также изучались как экспериментально [247, 248] так и теоретически [249, 250], правда для случая, когда эти величины (p_t и n) относились к одному и тому же быстройному интервалу. В работе [246] отмечалось, что исследование таких смешанных корреляций между средним поперечным импульсом и множественностью (т.е. между интенсивной и экстенсивной переменными) может представлять большую ценность с точки зрения распознавания различных возможных механизмов ядро-ядерных взаимодействий. В работе [251] было даже высказано предположение, что результаты корреляционных

экспериментов [247, 248] можно интерпретировать, как признаки формирования кварк-глюонной плазмы.

6.2.3 Дискретный аналог модели слияния струн

В этом параграфе мы предлагаем простой дискретный аналог [300, 301, 302] модели слияния струн, описанной в первом параграфе 6.2.1 этого раздела, который позволяет упростить вычисления дальних ФВ корреляций в случае реальных ядро-ядерных столкновений при большом числе струн. Кроме того, в рамках этого дискретного варианта модели для идеализированного случая с однородным распределением струн в поперечной плоскости удастся явно, аналитически, вычислить асимптотики коэффициентов корреляции при большой и малой плотности струн. Найденные асимптотики были использованы для отладки и контроля монтекарловских алгоритмов, позволяющих проводить вычисления корреляционных функций в случае реальных ядерных столкновений с учетом прицельного параметра и реалистического распределения ядерной плотности.

Вслед за классической формулировкой модели слияния струн (см. параграф 6.2.1) мы также рассмотрим два дискретных варианта модели, которые отвечают локальному (6.61) и глобальному (6.62) слиянию струн. В ядро-ядерных взаимодействиях в зависимости от прицельного параметра b мы имеем в поперечной плоскости некоторую область взаимодействия $S(b)$. Разобьем эту область на ячейки размером порядка поперечного размера струны. Таким образом получим $M = S(b)/\sigma_0$ ячеек, где $\sigma_0 = \pi r_0^2$ площадь поперечного сечения струны и $r_0 \approx 0,2 \div 0,25$ Фм - радиус струны (см., например, [252]).

В варианте с локальным слияния струн, мы будем предполагать, что если в i -ю ячейку попадают η_i струн, то в результате сложения цветных полей они формируют в этой ячейке струну высшего цвета, которая излучает в данном быстротном интервале в среднем $\mu_0\sqrt{\eta_i}$ частиц, средний поперечный импульс $\langle p_t^2 \rangle_{\eta_i}$ которых равен $\overline{p^2}\sqrt{\eta_i}$, тогда как одиночная струна излучает в среднем μ_0 частиц со средним импульсом $\langle p_t^2 \rangle_1 = \overline{p^2}$. Подчеркнем, что нулевые 'числа заполнения' $\eta_i=0$ также допустимы. Итак в варианте с локальным слияния струн, мы предполагаем:

$$\langle n \rangle_{\eta_i} = \mu_0\sqrt{\eta_i} \quad \text{и} \quad \langle p_t^2 \rangle_{\eta_i} = \overline{p^2}\sqrt{\eta_i} . \quad (6.72)$$

Упрощение здесь по сравнению с обычной моделью слияния струн (6.61)) [235] состоит в том, что нам не нужно теперь детально рассматривать геометрию перекрытия струн с целью нахождения величины площадей S_k

с данной степенью их перекрытия k . Это сильно упрощает вычисления в случае ядро-ядерных столкновений, где число струн может достигать нескольких тысяч, например, для центральных столкновений тяжелых ядер при энергиях RHIC и LHC.

В варианте с глобальным слиянием, мы прежде всего введем определение соседних ячеек, как ячеек имеющих общую сторону. Здесь необходимо пояснить, что в дискретном варианте модели разбиение области взаимодействия $S(b)$ в поперечной плоскости на ячейки с площадью равной поперечному сечению струны σ_0 производится путем наложения на эту область прямоугольной сетки со стороной равной $\sqrt{\sigma_0}$. При этом индекс i , нумерующий ячейки, реализуется в виде набора из двух индексов $\{j, l\}$, задающих положение ячейки в этой сетке. Суммирование по всем ячейкам в поперечной плоскости $i = 1, 2, \dots, M$ означает суммирование по всем ячейкам $\{j, l\}$ этой сетки.

После того, как мы пояснили, какие ячейки мы считаем соседними, мы можем определить кластер, как совокупность соседних ячеек с ненулевыми 'числами заполнения' $\eta_i \neq 0$. Далее для дискретного варианта модели мы можем применять те же формулы (6.62), что и в обычной модели с глобальным слиянием струн. При этом N_{cl}^{str} - число струн формирующих кластер равно сумме η_i по всем ячейкам кластера, а в качестве S_{cl}/σ_0 в формулах (6.62) надо использовать число ячеек в этом кластере. Разумеется в каждом событии мы должны заново на основе этих правил определять границы кластеров, однако, необходимости детального рассмотрения геометрии перекрытия струн опять удастся избежать. Таковы особенности формулировки дискретного варианта модели с глобальным слиянием струн.

После формулировки особенностей дискретного подхода в случае локального и глобального слияния струн, продолжим общее рассмотрение. От события к событию число струн η_i в i -ой ячейке будет флуктуировать относительно среднего значения $\bar{\eta}_i$. Ясно, что для случая реальных ядерных столкновений эти средние значения $\bar{\eta}_i$ будут различаться для разных ячеек, а именно зависеть от положения (\mathbf{s}_i) ячейки в плоскости прицельного параметра (\mathbf{s} - двумерный вектор в поперечной плоскости). Чтобы найти значение какой-либо физической величины в данном событии, необходимо просуммировать вклады от всех ячеек ($i = 1, 2, \dots, M$), что соответствует интегрированию по \mathbf{s} в поперечной плоскости.

Средняя локальная плотность первичных струн $\bar{\eta}_i/\sigma_0$ в точке \mathbf{s}_i в случае ядро-ядерных AB -столкновений при некотором фиксированном значении прицельного параметра b может быть найдена, исходя из известных профильных функций этих ядер $T_A(\mathbf{s}_i + \mathbf{b}/2)$ и $T_B(\mathbf{s}_i - \mathbf{b}/2)$, например,

в рамках приближения Глаубера-Ситенко [253]-[259]. Соответствующая процедура изложена нами в приложении в работе [309]. Здесь мы не будем ее касаться, считая, что все средние значения $\bar{\eta}_i$ уже зафиксированы на основе указанных рассмотрений при заданном значении прицельного параметра b .

Далее в монте-карловской (МК) реализации этой модели происходит последовательная генерация конфигураций $C \equiv \{\eta_i\}$ (событий) вокруг этих средних значений $\bar{\eta}_i$. Чтобы получить значения физических величин в одном данном событии (для данной сгенерированной конфигурации C), необходимо просуммировать вклады от всех ячеек ($i = 1, 2, \dots, M$) в соответствии с правилами локального или глобального слияния (см. выше). После чего, чтобы найти средние значения физических величин, необходимо проводить суммирование по событиям, т.е. по различным конфигурациям C .

Приведем общие формулы, позволяющие вычислить корреляционную функцию $\langle B \rangle_F = f(F)$ (6.63) между динамическими переменными в заднем B и переднем F быстрой окнах и как следствие найти коэффициент корреляции b_{B-F} (6.64) между ними. Обозначим через $W(C)$ вероятность реализации струнной конфигурации $C = \{\eta_1, \dots, \eta_M\}$ в данном событии, тогда, очевидно, имеем:

$$\langle B \rangle_F = \sum_B B P_F(B) , \quad P_F(B) = P(B, F) / P(F) , \quad (6.73)$$

$$P(B, F) = \sum_C W(C) P_C(B, F) = \sum_C W(C) P_C(B) P_C(F) , \quad (6.74)$$

где в последнем равенстве мы использовали тот факт, что для *фиксированной* струнной конфигурации $C = \{\eta_1, \dots, \eta_M\}$ рождение частиц в переднем и заднем быстрой интервалах происходит независимым образом (см. обсуждение в первом разделе этой главы в параграфе 6.1.1 и после формулы (6.25)). Подставляя (6.74) в (6.73), окончательно находим:

$$\langle B \rangle_F = \frac{\sum_C \langle B \rangle_C W(C) P_C(F)}{\sum_C W(C) P_C(F)} , \quad (6.75)$$

где мы также использовали, что

$$\langle B \rangle_C = \sum_B B P_C(B) \quad \text{и} \quad P(F) = \sum_C W(C) P_C(F) . \quad (6.76)$$

Из формул (6.74) и (6.75) сразу видно, что, как мы уже упоминали в первом разделе настоящей главы, все FB корреляции, которые мы рассматриваем в этой главе, в рамках нашего подхода возникают только благодаря флуктуациям конфигурации излучателей от события к событию. Действительно, в случае когда возможна только одна конфигурация

C_0 , $W(C_0) = 1$, в формуле (6.74) происходит факторизация $P(B, F) = P(B)P(F)$ и дальнейшие ФВ корреляции исчезают. В этом случае из формулы (6.75) имеем $\langle B \rangle_F = \langle B \rangle$, т.е. корреляционная функция не зависит от F и согласно (6.64) корреляционный коэффициент b_{B-F} равен нулю.

6.2.4 Формулировка дискретного подхода с локальным слиянием струн

Введем величины, которые в дальнейшем будут играть важную роль:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^M \eta_i, & \bar{N} &= \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i, \\ r &= \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i}, & \bar{r} &= \sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i} \end{aligned} \quad (6.77)$$

Очевидно, что N - это число струн в данном событии, а \bar{N} - среднее число струн для событий данного типа (при фиксированном прицельном параметре \mathbf{b}).

Чтобы перейти к дальним ФВ корреляциям рассмотрим два быстроем окна переднее Δy_F и заднее Δy_B . Каждому событию соответствует определенная конфигурация струн $\{\eta_1, \dots, \eta_M\}$ и определенные числа заряженных частиц $\{n_1, \dots, n_M\}$, испущенных этими струнами в переднее быстроем окно. Таким образом, полное число частиц n_F , излученных в данном событии в переднее окно, будет равно

$$n_F = \sum_{i=1}^M n_i. \quad (6.78)$$

Вероятность зарегистрировать n_F частиц в переднем окне для данной струнной конфигурации $\{\eta_1, \dots, \eta_M\}$ равна

$$P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(n_F) = \sum_{\{n_1, \dots, n_M\}} \delta_{n_F, \sum_i n_i} \prod_{i=1}^M p_{\eta_i}(n_i) \quad (6.79)$$

где $p_{\eta_i}(n_i)$ есть вероятность того, что струна η_i излучит n_i частиц в переднее быстроем окно. Согласно предположению модели (6.72):

$$\langle n_i \rangle_{\eta_i} \equiv \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i p_{\eta_i}(n_i) = \mu_0 \sqrt{\eta_i}. \quad (6.80)$$

Выше мы обозначили через $W(\eta_1, \dots, \eta_M)$ вероятность реализации струнной конфигурации $\{\eta_1, \dots, \eta_M\}$ в данном событии, тогда среднее значение

некоторой физической величины в заднем быстротном окне B при условии рождения n_F частиц в переднем окне будет, согласно (6.75), равно

$$\langle B \rangle_{n_F} = \frac{\sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} \langle B \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} W(\eta_1, \dots, \eta_M) P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(n_F)}{\sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} W(\eta_1, \dots, \eta_M) P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(n_F)}. \quad (6.81)$$

Необходимо помнить, что при вычислении этих M -кратных сумм мы должны исключить один член, где все $\eta_i = 0$, который соответствует отсутствию даже одного неупругого взаимодействия между нуклонами сталкивающихся ядер (см. более подробное обсуждение этого вопроса в приложении 6.1).

Если в качестве физической величины B мы подставим в эту формулу n_B - число частиц, рожденных в данном событии в заднее быстротное окно, то тогда для нахождения корреляционной функции $\langle n_B \rangle_{n_F}$ по формуле (6.81) в ее числителе необходимо, согласно (6.72), положить:

$$\langle n_B \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} = \mu_0 \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i} = \mu_0 r. \quad (6.82)$$

Мы здесь в явном виде используем тот факт, что для *фиксированной* струнной конфигурации $\{\eta_1, \dots, \eta_M\}$ рождение частиц в переднем и заднем быстротных интервалах происходит независимым образом (см. обсуждение в первом разделе этой главы в параграфе 6.1.1 и после формулы (6.25)).

Если же в качестве физической величины B мы возьмем p_{tB}^2 - средний квадрат поперечного импульса в данном событии для частиц, рожденных в заднее быстротное окно (6.69), то тогда для нахождения корреляционной функции $\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}$ по формуле (6.81) в ее числителе необходимо, также согласно (6.72), положить:

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} = \sum_{i=1}^M \frac{\sqrt{\eta_i}}{\sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i}} \bar{p}^2 \sqrt{\eta_i} = \bar{p}^2 \frac{\sum_{i=1}^M \eta_i}{\sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i}} = \bar{p}^2 \frac{N}{r}. \quad (6.83)$$

Здесь $\sqrt{\eta_i} / (\sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i})$ - вероятность рождения частицы из ячейки η_i , а $\bar{p}^2 \sqrt{\eta_i}$ - средний поперечный импульс частиц, рожденных из этой ячейки.

В дальнейшем, мы будем считать, что числа первичных струн в разных ячейках η_i флуктуируют независимым друг от друга образом относительно своих средних значений $\bar{\eta}_i$, определяемых профильными функциями ядер и значением прицельного параметра b (см. выше). В этом случае:

$$W(\eta_1, \dots, \eta_M) = \prod_{i=1}^M w(\eta_i), \quad \sum_{\eta_i=0}^{\infty} \eta_i w(\eta_i) = \bar{\eta}_i. \quad (6.84)$$

Иногда мы будем также обращаться к простому "однородному" случаю с постоянной средней плотностью струн, когда все $\bar{\eta}_i$ одинаковы для всей области взаимодействия $\bar{\eta}_i = \eta$ (в отличие от η_i , которые в каждой ячейке независимым образом всегда флуктуируют от события к событию). Параметр η в этом случае совпадает с параметром η , использованным в работах [233, 235, 237], и имеет смысл среднего числа струн, приходящегося на площадь одной струны: $\eta = (\text{средняя плотность струн}) \times \sigma_0$. В общем случае параметры $\bar{\eta}_i$ имеют тот же смысл, однако средняя плотность струн зависит от точки \mathbf{s}_i в плоскости прицельного параметра: $\bar{\eta}_i = (\text{средняя плотность струн в точке } \mathbf{s}_i) \times \sigma_0$.

Если для распределения частиц по множественности от одной ячейки $p_{\eta_i}(n_i)$, где перекрылись η_i струн, использовать распределение Пуассона, как мы это делали в первом разделе настоящей главы для отдельных излучателей разной силы, то, учитывая (6.72), можно записать

$$p_{\eta_i}(n_i) = \rho_{\mu_0 \sqrt{\bar{\eta}_i}}(n_i) \equiv e^{-\mu_0 \sqrt{\bar{\eta}_i}} \frac{(\mu_0 \sqrt{\bar{\eta}_i})^{n_i}}{n_i!}. \quad (6.85)$$

Мы обозначили здесь через $\rho_a(x)$ - распределение Пуассона с $\bar{x} = a$. Из (6.79) ясно (см. параграф 6.1.3), что это приводит к пуассонову распределению для

$$P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(n_F) = \rho_{\mu_0 \sum_i \sqrt{\eta_i}}(n_F) \quad (6.86)$$

со средним значением $\langle n_F \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} = \mu_0 \sum_i \sqrt{\eta_i} = \mu_0 r = \langle n_F \rangle_r$ и квадратом дисперсии $\sigma_{rF}^2 = \langle n_F \rangle_r = \mu_0 r$. При больших значениях параметра $\mu_0 r \gg 1$ это пуассоновое распределение (6.86) может быть аппроксимировано гауссовым распределением:

$$P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(n_F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{rF}}} e^{-\frac{(n_F - \langle n_F \rangle_r)^2}{2\sigma_{rF}^2}} \quad (6.87)$$

Отметим, что в работе [300] нами было показано, что если для распределения $p_{\eta_i}(n_i)$ выбрать биномиальную форму, то мы получим биномиальное распределение и для $P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(n_F)$, со средним значением $\langle n_F \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} = \mu_0 \sum_i \sqrt{\eta_i} = \mu_0 r = \langle n_F \rangle_r$ и квадратом дисперсии $\sigma_{rF}^2 = \langle n_F \rangle_r (1 - \lambda) = \mu_0 r (1 - \lambda)$, где дополнительный параметр λ заключен в пределах $0 \leq \lambda < 1$. Причем предел $\lambda \rightarrow 0$ соответствует распределению Пуассона, а $\lambda \rightarrow 1$ соответствует случаю, когда распределение по числу частиц n_i , испускаемых каждой ячейкой η_i в данный быструтотный интервал, становится очень узким с максимумом равным $\bar{n}_i = \mu_0 \sqrt{\eta_i}$.

Более того, основываясь на центральной предельной теореме теории вероятности, можно утверждать, что при большом числе ячеек M гаус-

сова формула (6.87) будет справедлива для любого реалистического типа зависимости $p_{\eta_i}(n_i)$.

6.2.5 Гауссово приближение для локального слияния при большой плотности струн

В этом параграфе мы оценим M -кратные суммы $\sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}$, входящие в (6.81), в случае, когда все $\bar{\eta}_i \gg 1$, предполагая, что можно использовать гауссово приближение для каждого $w(\eta_i)$ (6.84):

$$w(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\eta_i}} e^{-\frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2\sigma_{\eta_i}^2}}, \quad (6.88)$$

где $\sigma_{\eta_i}^2 = \bar{\eta}_i(1 - \lambda_\eta)$, и где опять $\lambda_\eta \rightarrow 0$ соответствует пуассонову пределу, а $\lambda_\eta \rightarrow 1$ соответствует случаю с очень узким распределением по числу струн N , имеющему максимум равный $\bar{N} = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i$ (см. подробнее в [300]).

Согласно (6.84), (6.87) и (6.88) в формуле (6.81) теперь и $P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(n_F)$, и $W(\eta_1, \dots, \eta_M)$ имеют гауссову форму. Действуя как в [300]-[302], заменяя в пределе $\bar{\eta}_i \gg 1$ суммирование по η_i на интегрирование, находим для корреляционных функций следующие выражения:

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \mu_0 \frac{\int d\eta_1 \dots d\eta_M r \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\varphi(\eta_i, n_F)}}{\int d\eta_1 \dots d\eta_M \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\varphi(\eta_i, n_F)}} \quad (6.89)$$

и

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \bar{p}^2 \frac{\int d\eta_1 \dots d\eta_M \frac{N}{r} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\varphi(\eta_i, n_F)}}{\int d\eta_1 \dots d\eta_M \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\varphi(\eta_i, n_F)}}. \quad (6.90)$$

Напомним, что согласно (6.77) $N = \sum_{i=1}^M \eta_i$ и $r = \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i}$. Функция $\varphi(\eta_1, \dots, \eta_M, n_F)$, зависящая от $M + 1$ переменной, имеет вид:

$$\varphi(\eta_i, n_F) = \sum_{i=1}^M \frac{(\eta_i - \bar{\eta}_i)^2}{2\bar{\eta}_i(1 - \lambda_\eta)} + \frac{(n_F - \mu_0 r)^2}{2\mu_0 r(1 - \lambda)} \quad (6.91)$$

Интегралы в формулах (6.89) и (6.90) оцениваются методом перевала. Множители перед экспонентами выносятся из-под интеграла в точке, где φ минимально, после чего оставшиеся интегралы в числителе и знаменателе сокращаются, в результате чего получаем

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \mu_0 r^* \quad \text{и} \quad \langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \bar{p}^2 \frac{N^*}{r^*}. \quad (6.92)$$

Величины N^* и r^* - это значения N и r (6.77) в точке $\{\eta_1^*, \dots, \eta_M^*\}$, где $\varphi(\eta_i, n_F)$ достигает минимума (n_F входит как параметр):

$$\frac{\partial \varphi(\eta_i, n_F)}{\partial \eta_i} = 0 . \quad (6.93)$$

Это приводит к следующей системе уравнений для η_i^* :

$$\frac{\eta_i^*}{\bar{\eta}_i} - 1 = \frac{\mu_0 \kappa}{4\sqrt{\eta_i^*}} \left(\frac{n_F^2}{\mu_0^2 r^{*2}} - 1 \right) \quad (6.94)$$

Напомним, что $r^* = \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i^*}$, а через κ мы обозначили отношение

$$\kappa = \frac{1 - \lambda_\eta}{1 - \lambda} . \quad (6.95)$$

Смысл параметра κ ясен из обсуждений в конце предыдущего и начале этого параграфов (см. также [300]). В случае распределений Пуассона $\kappa = 1$, а в остальных случаях это относительная ширина распределений $p(n_i)$ и $w(\eta_i)$.

Система уравнений (6.94) задает η_i^* как функцию n_F , что позволяет найти корреляционные функции (6.92). Вводя краткие обозначения

$$z_i = \sqrt{\frac{\eta_i^*}{\bar{\eta}_i}} , \quad f = \frac{n_F}{\mu_0 \bar{r}} = \frac{n_F}{\langle n_F \rangle} , \quad a_i = \frac{\mu_0 \kappa}{4\sqrt{\bar{\eta}_i}} , \quad (6.96)$$

можно переписать (6.94) в следующем виде

$$z_i^3 - z_i = a_i \left(f^2 \frac{\bar{r}^2}{r^{*2}} - 1 \right) , \quad (6.97)$$

где

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i} , \quad r^* = \sum_{i=1}^M z_i \sqrt{\bar{\eta}_i} \quad \text{и} \quad N^* = \sum_{i=1}^M z_i^2 \bar{\eta}_i . \quad (6.98)$$

Напомним, что в данном рассмотрении мы считаем, что все коэффициенты $\bar{\eta}_i$ заданы (см. параграф 6.2.3). Система (6.97) в неявном виде задает z_i как функции f : $z_i = z_i(f)$. Зная их, можно вычислить $\langle n_B \rangle_{n_F}$ и $\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}$ как функции n_F , используя (6.92) и (6.96).

6.2.6 Асимптотики коэффициентов корреляции n - n и p_t^2 - n при большой плотности струн в случае локального слияния

Введем сокращенные обозначения \bar{b} и $\bar{\beta}$ для коэффициентов n - n и p_t^2 - n корреляций, которые определены согласно (6.66) и (6.70):

$$\bar{b} \equiv b_{n-n} = \frac{\langle n_F \rangle}{\langle n_B \rangle} \frac{d \langle n_B \rangle_{n_F}}{d n_F} \Big|_{n_F = \langle n_F \rangle} , \quad \bar{\beta} \equiv b_{p_t^2-n} \equiv \frac{\langle n_F \rangle}{\langle p_{tB}^2 \rangle} \frac{d \langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}}{d n_F} \Big|_{n_F = \langle n_F \rangle} \quad (6.99)$$

Как мы уже отмечали в параграфе 6.2.2, для симметричных быстротных окон коэффициент n - n корреляции \bar{b} совпадает с коэффициентом b в линейных формулах (6.1) и (6.71). Что касается коэффициента $\bar{\beta}$, то отметим, что аналогичное (6.99) определение коэффициента p_t - n корреляции используется в работе [260].

Используя (6.92) и (6.96), для этих корреляционных коэффициентов имеем:

$$\bar{b} = \frac{1}{\bar{r}} \left. \frac{dr^*}{df} \right|_{f=1} \quad \text{и} \quad \bar{\beta} = \frac{\bar{r}}{\bar{N}} \left. \frac{d(N^*/r^*)}{df} \right|_{f=1}. \quad (6.100)$$

Мы не можем решить уравнения (6.97) с тем, чтобы найти функции $z_i = z_i(f)$ в явном виде. Однако, чтобы вычислить коэффициенты корреляции (6.100) достаточно найти только производные этих функций при $f=1$, т.е. $z'_i(1) = \left. \frac{dz_i(f)}{df} \right|_{f=1}$. Это удастся сделать в явном виде. Действительно, видно, что при $f=1$ система (6.97) имеет очевидное решение:

$$f = 1, \quad z_i = 1, \quad \eta_i^* = \bar{\eta}_i, \quad r^* = \bar{r}, \quad N^* = \bar{N}. \quad (6.101)$$

Нам необходимо вычислить $z'_i(f)$ только при $f = 1$. Дифференцируя (6.97) по f и затем используя снова (6.101), находим

$$z'_i(1) = a_i \frac{4\bar{r}}{4\bar{r} + \mu_0\kappa M} \quad (6.102)$$

где $a_i = \mu_0\kappa / (4\sqrt{\bar{\eta}_i})$. Теперь легко вычислить сами коэффициенты корреляции:

$$\bar{b} = \frac{1}{\bar{r}} \left. \frac{dr^*}{df} \right|_{f=1} = \frac{1}{\bar{r}} \sum_{i=1}^M z'_i(1) \sqrt{\bar{\eta}_i} = \frac{\mu_0\kappa}{\mu_0\kappa + 4\bar{r}/M} \quad (6.103)$$

и

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\bar{N}} \left. \frac{dN^*}{df} \right|_{f=1} - \frac{1}{\bar{r}} \left. \frac{dr^*}{df} \right|_{f=1} = \frac{1}{\bar{N}} \left. \frac{dN^*}{df} \right|_{f=1} - \bar{b}. \quad (6.104)$$

Используя

$$\left. \frac{dN^*}{df} \right|_{f=1} = 2 \sum_{i=1}^M z'_i(1) \bar{\eta}_i = \frac{2\mu_0\kappa\bar{r}^2}{\mu_0\kappa M + 4\bar{r}}, \quad (6.105)$$

имеем

$$\bar{\beta} = \left(\frac{2\bar{r}^2}{\bar{N}M} - 1 \right) \frac{\mu_0\kappa}{\mu_0\kappa + 4\bar{r}/M} = \left(\frac{2\bar{r}^2}{\bar{N}M} - 1 \right) \bar{b}. \quad (6.106)$$

Видна связь между коэффициентами корреляции p_t^2 - n и n - n . Заметим, что в силу очевидного неравенства:

$$\left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i} \right)^2 \leq M \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i \quad (6.107)$$

имеем $\bar{r}^2 \leq M\bar{N}$ и, следовательно, всегда $\bar{\beta} \leq \bar{b}$.

Ясно, что в однородном случае с постоянной средней плотностью струн ($\bar{\eta}_i \equiv \eta$), мы имеем $\bar{r} = M\sqrt{\eta}$, $\bar{N} = M\eta$, $\bar{r}^2 = \bar{N}M$ и

$$\bar{\beta} = \bar{b} = \frac{\mu_0\kappa}{\mu_0\kappa + 4\sqrt{\eta}} \quad (6.108)$$

Из (6.103) видно, что коэффициент n - n корреляции всегда положителен. Может ли, в принципе, коэффициент p_t^2 - n корреляции быть отрицательным? Рассмотрим некоторую простую неоднородную ситуацию, когда $\bar{\eta}_i = \eta_+$ при $i = 1, \dots, M_1$ и $\bar{\eta}_i = \eta_-$ при $i = M_1 + 1, \dots, M$, причем $M_1 \sim M$ и $\eta_+ \gg \eta_- \gg 1$. Тогда $\bar{r} = M_1\sqrt{\eta_+} + (M - M_1)\sqrt{\eta_-} \approx M_1\sqrt{\eta_+}$ и $\bar{N} = M_1\eta_+ + (M - M_1)\eta_- \approx M_1\eta_+$. В результате находим

$$\bar{\beta} \approx \left(2\frac{M_1}{M} - 1\right)\bar{b} \quad (6.109)$$

Видно, что при $M_1 < M/2$, имеем $\bar{\beta} < 0$.

6.2.7 Скейлинг по $\mu_0/\eta^{1/2}$ при большой плотности струн

Рассмотрим подробнее однородный случай с постоянной средней плотностью струн ($\bar{\eta}_i \equiv \eta$). В этом случае при большой плотности струн $\eta \gg 1$ удастся вычислить не только коэффициенты n - n и p_t^2 - n корреляций, но и соответствующие корреляционные функции $\langle n_B \rangle_{n_F}$ и $\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}$.

Как было показано в конце предыдущего параграфа (6.108), в этом случае коэффициенты n - n и p_t^2 - n корреляций, определяемые согласно (6.99), взаимосвязаны:

$$\bar{\beta} = \bar{b} = \frac{\mu_0\kappa}{\mu_0\kappa + 4\sqrt{\eta}} = \frac{a}{a + 1}, \quad \text{где} \quad a = \frac{\mu_0\kappa}{4\sqrt{\eta}}. \quad (6.110)$$

Чтобы вычислить сами корреляционные функции $\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}$ и $\langle n_B \rangle_{n_F}$ при любом значении n_F , заметим, что в однородном случае, благодаря симметрии, система уравнений (6.97) имеет симметричное решение $z_i = z$ и таким образом может быть сведена к одному уравнению

$$z^3 - z = a \left(\frac{f^2}{z^2} - 1 \right). \quad (6.111)$$

Мы учли, что в этом случае $\bar{r} = M\sqrt{\eta}$, $r^* = zM\sqrt{\eta}$, $N^* = z^2M\eta$ и

$$f = \frac{n_F}{\mu_0 M \sqrt{\eta}} = \frac{n_F}{\langle n_F \rangle}. \quad (6.112)$$

Уравнение (6.111) определяет функцию $z = z(f)$, используя затем (6.92), находим

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \mu_0 r^* = \mu_0 M \sqrt{\eta} z(f) = \langle n_B \rangle z(f) \quad (6.113)$$

и

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \overline{p^2} \frac{N^*}{r^*} = \overline{p^2} \sqrt{\eta} z(f) = \langle p_{tB}^2 \rangle z(f). \quad (6.114)$$

Таким образом, при любом значении $n_F = \langle n_F \rangle f$ имеем:

$$\frac{\langle n_B \rangle_{n_F}}{\langle n_B \rangle} = \frac{\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}}{\langle p_{tB}^2 \rangle} = z(f) = z\left(\frac{n_F}{\langle n_F \rangle}\right). \quad (6.115)$$

Из (6.110) и (6.111) видно, что в рассматриваемом однородном случае при большой плотности струн η имеет место *скейлинг*. Коэффициенты p_t^2 - n и n - n корреляций и сами корреляционные функции зависят только от одной комбинации параметров: $a = \mu_0 \kappa / (4\sqrt{\eta})$.

6.2.8 Глобальное слияние при большой плотности струн

В этом разделе мы рассмотрим дискретный вариант модели с глобальным слиянием струн, который мы ввели в параграфе 6.2.3. Рассмотрение будем проводить при большой средней плотности струн ($\bar{\eta}_i \gg 1$), когда согласно правилам, сформулированным в параграфе 6.2.3, в области взаимодействия $S(b)$ (b - прицельный параметр) образуется единый кластер ($S_{cl} \simeq S(b)$).

В этом случае на первом этапе также имеется $M = S(b)/\sigma_0$ ячеек (как и в случае локального слияния), при этом η_i в каждой ячейке ($i = 1, \dots, M$) флуктуируют относительно $\bar{\eta}_i$. Далее (в отличие от локального слияния) согласно (6.62) для данного события необходимо найти

$$k_{cl} = \frac{N\sigma_0}{S_{cl}} = \frac{N}{M} = \frac{1}{M} \sum_i \eta_i \equiv \eta_c \quad (6.116)$$

(здесь по-прежнему используем обозначения (6.77)), и затем сгенерировать количество частиц, рождающихся из единого кластера со средней множественностью

$$\langle n \rangle_{cl} = \mu_0 \frac{S_{cl}}{\sigma_0} \sqrt{k_{cl}} = \mu_0 M \sqrt{\eta_c} = \mu_0 \sqrt{MN} = \mu_c \sqrt{\eta_c} \quad (6.117)$$

($\mu_c \equiv \mu_0 M$) и средним поперечным импульсом

$$\langle p_t^2 \rangle_{cl} = \overline{p^2} \sqrt{k_{cl}} = \overline{p^2} \sqrt{\frac{N}{M}} = \overline{p^2} \sqrt{\eta_c}. \quad (6.118)$$

Напомним, что N - общее число первичных струн в данном событии.

Общая формула (6.75) в данном случае принимает вид:

$$\langle B \rangle_{n_F} = \frac{\sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} \langle B \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} W(\eta_1, \dots, \eta_M) P_{\mu_c \sqrt{\eta_c}}(n_F)}{\sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} W(\eta_1, \dots, \eta_M) P_{\mu_c \sqrt{\eta_c}}(n_F)}. \quad (6.119)$$

Здесь $P_{\mu_c\sqrt{\eta_c}}(n_F)$ - вероятность рождения в данном событии n_F частиц в переднем окне от кластера, который в среднем излучает в это окно $\mu_c\sqrt{\eta_c} = \mu_c\sqrt{\frac{1}{M}\sum_i\eta_i}$ частиц. В качестве $\langle B \rangle_{\{\eta_1,\dots,\eta_M\}}$ при вычислении корреляционной функции $\langle n_B \rangle_{n_F}$ необходимо использовать:

$$\langle n_B \rangle_{\{\eta_1,\dots,\eta_M\}} = \mu_c\sqrt{\eta_c} = \mu_0 M \sqrt{\frac{1}{M}\sum_i\eta_i}, \quad (6.120)$$

а для вычисления корреляционной функции $\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}$:

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{\{\eta_1,\dots,\eta_M\}} = \bar{p}^2\sqrt{\eta_c} = \bar{p}^2 \sqrt{\frac{1}{M}\sum_i\eta_i}. \quad (6.121)$$

(Мы пока предполагаем, что быстротные окна симметричны и $\mu_{0B} = \mu_{0F} = \mu_0$.) Из формул (6.119)-(6.121) видно, что отличие от случая локального слияния состоит в замене $\frac{1}{M}\sum_i\sqrt{\eta_i} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{M}\sum_i\eta_i}$. Как следствие, вычисления в случае глобального слияния сильно упрощаются, так как многократные суммы $\sum_{\{\eta_1,\dots,\eta_M\}}$ в (6.119) удается свести к однократным суммам \sum_N по числу струн $N = \sum_i\eta_i$ в данном событии.

Таким образом, в случае глобального слияния при большой плотности струн для корреляционных функций могут быть написаны простые формулы:

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \frac{\mu_0\sqrt{M}\sum_N\sqrt{N}W(N)p_{\mu_0\sqrt{MN}}(n_F)}{\sum_N W(N)p_{\mu_0\sqrt{MN}}(n_F)} \quad (6.122)$$

и

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \frac{\bar{p}^2\sum_N\sqrt{N}W(N)p_{\mu_0\sqrt{MN}}(n_F)}{\sqrt{M}\sum_N W(N)p_{\mu_0\sqrt{MN}}(n_F)}, \quad (6.123)$$

где $W(N)$ дается формулой

$$W(N) = \sum_{\{\eta_1,\dots,\eta_M\}} \delta_{N,\sum_i\eta_i} \prod_i w(\eta_i). \quad (6.124)$$

Из (6.122) и (6.123) видно, что в этом случае n - n и p_t^2 - n корреляции опять связаны тем же соотношением (6.115), что и в случае локального слияния при большой плотности струн

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \frac{\bar{p}^2}{\mu_0 M} \langle n_B \rangle_{n_F} \quad \text{или} \quad \frac{\langle n_B \rangle_{n_F}}{\langle n_B \rangle} = \frac{\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F}}{\langle p_{tB}^2 \rangle}. \quad (6.125)$$

Заметим, что в отличие от случая локального слияния, здесь этот результат получается без каких-либо предположений относительно конкретных свойств распределений $p(n_F)$ и $w(\eta_i)$ и для произвольных (в том числе и не равных) $\bar{\eta}_i$.

В принципе, далее можно уже численно находить корреляционные функции и корреляционные p_i^2 - n и n - n коэффициенты непосредственно по формулам (6.122) и (6.123), однако, используя описанное в параграфе 6.2.5 гауссово приближение, удастся получить для них и явные выражения. Тем более, что при высокой плотности струн у нас больше оснований применять это приближение для случая глобального слияния, чем для локального слияния. Дело здесь в том, что как ясно из формулы (6.124), в этом случае согласно центральной предельной теореме теории вероятности, мы будем иметь гауссово распределение (6.126) для $W(N)$ вне зависимости от конкретного вида распределений $w(\eta_i)$. В случае же локального слияния нам приходилось предполагать (6.88), что каждое из распределений $w(\eta_i)$ имеет гауссову форму. Итак, в случае с глобальным слиянием

$$W(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-\frac{(N-\bar{N})^2}{2\sigma_N^2}}, \quad (6.126)$$

где $\sigma_N^2 = \bar{N}(1 - \lambda_\eta)$, а параметр λ_η характеризует отклонение от пуассонова предела (см. замечание после формулы (6.88)).

Ясно, что в этом случае результаты должны зависеть от среднего числа струн \bar{N} и от комбинации μ_M , входящей в (6.122) и (6.123):

$$\bar{N} = \sum_i \bar{\eta}_i, \quad \mu_M \equiv \mu_0 \sqrt{M} \quad (6.127)$$

Ниже в гауссовом приближении будет показано, что результаты на самом деле зависят только от одной комбинации параметров (6.127), а именно от $\mu_M/\sqrt{\bar{N}} = \mu_0/\sqrt{\bar{N}/M}$, т.е. имеет место скейлинг как и в случае локального слияния.

Действительно, действуя так же как и в случае с локальным слиянием (см. параграф 6.2.5) находим

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \mu_M \sqrt{N^*} = \mu_0 \sqrt{M} \sqrt{N^*} \quad (6.128)$$

или, учитывая (6.125),

$$\langle n_B \rangle_{n_F} / \langle n_B \rangle = \langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} / \langle p_{tB}^2 \rangle = \sqrt{N^*/\bar{N}}, \quad (6.129)$$

где N^* - это такое значение N , при котором функция

$$\varphi(N, n_F) = \frac{(N - \bar{N})^2}{2\bar{N}(1 - \lambda_\eta)} + \frac{(n_F - \mu_M \sqrt{N})^2}{2\mu_M \sqrt{N}(1 - \lambda)} \quad (6.130)$$

достигает минимума. Вводя опять краткие обозначения:

$$z \equiv \sqrt{\frac{N^*}{\bar{N}}}, \quad f = \frac{n_F}{\mu_M \sqrt{\bar{N}}} = \frac{n_F}{\langle n_F \rangle}, \quad a = \frac{\mu_M \kappa}{4\sqrt{\bar{N}}} = \frac{\mu_0 \kappa}{4\sqrt{\bar{N}/M}}, \quad (6.131)$$

мы опять приходим к тому же самому уравнению (6.111), определяющему функцию $z = z(f)$, однако, значение коэффициента a теперь дается формулой (6.131). После чего из (6.129) и (6.131) следует тоже самое выражение (6.115) для корреляционных функций, что и в случае с локальным слиянием. (Отметим, что в модели без слияния струн, которую мы исследовали в работе [300], вид уравнений для $z(f)$ совершенно другой.)

Для коэффициентов корреляции в случае глобального слияния также получается то же самое выражение (6.110), что и в случае локального слияния, но с коэффициентом a задаваемым (6.131):

$$\bar{\beta} = \bar{b} = z'(1) = \frac{\mu_M \kappa}{\mu_M \kappa + 4\sqrt{N}} = \frac{a}{a+1}, \quad \text{где} \quad a = \frac{\mu_0 \kappa}{4\sqrt{N}/M}. \quad (6.132)$$

Мы действительно убеждаемся, что и в случае с глобальным слиянием струн при их большой плотности коэффициенты p_t^2 - n и n - n корреляций зависят только от одной комбинации параметров a (6.132), т.е. снова имеет место скейлинг. Заметим, что, в отличие от случая локального слияния, мы получаем этот результат для произвольных (в том числе и не равных) $\bar{\eta}_i \gg 1$.

В однородном случае все $\bar{\eta}_i = \eta$, и мы имеем $\bar{N} = \sum_i \bar{\eta}_i = M\eta$, после чего выражения для a , а следовательно и коэффициенты корреляций для случаев локального (6.110) и глобального (6.132) слияния струн совпадают.

В отличие от случая локального слияния, в случае с глобальным слиянием струн мы можем контролировать достоверность гауссова приближения, вычисляя по точным формулам (6.122) и (6.123) при разных значениях параметра M .

6.2.9 Асимптотики коэффициентов n - n и p_t^2 - n корреляций.

Сводка результатов и обсуждение

Прежде всего сравним результаты, полученные в этом разделе [301, 302] для случая со слиянием струн с результатами, полученными нами в [300] в рамках такого же дискретного подхода, но без учета возможности слияния струн.

В работе [300] мы получили для случая **без слияния** струн:

1. для n - n корреляций: $\bar{b} = \frac{a}{a+1}$, где $a = \mu_0 \kappa$;
2. для p_t^2 - n корреляций: $\bar{\beta} = 0$.

В этом разделе [301, 302] в случае **глобального** и **локального** слияния струн для **однородного** случая ($\bar{\eta}_i = \eta$) при **больших** $\eta \gg 1$ мы нашли:

1. для n - n корреляций: $\bar{b} = \frac{a}{a+1}$, где $a = \frac{\mu_0 \kappa}{4\sqrt{N}/M} = \mu_0 \kappa / (4\sqrt{\eta})$;

2. для p_t^2-n корреляций: $\bar{\beta} = \bar{b} = \frac{a}{a+1}$ с тем же a .

Видим, что для случая со слиянием $n-n$ корреляции становятся слабее, но при этом появляются p_t^2-n корреляции, которые при больших $\eta \gg 1$ достигают той же величины. В этом случае также имеет место $\mu_0/\sqrt{\eta}$ -скейлинг.

Для **неоднородной** ситуации (разные $\bar{\eta}_i$) при **локальном** слиянии струн находим при **больших** $\bar{\eta}_i \gg 1$:

1. для $n-n$ корреляций: $\bar{b} = \frac{a}{a+1}$, где $a = \mu_0\kappa/(4\bar{r}/M)$, $\bar{r} = \sum_{i=1}^M \sqrt{\bar{\eta}_i}$;

2. для p_t^2-n корреляций: $\bar{\beta} = \left(\frac{2\bar{r}^2}{NM} - 1\right) \bar{b}$, где $\bar{N} = \sum_{i=1}^M \bar{\eta}_i$.

Откуда следует, что $\bar{\beta} \leq \bar{b}$ (6.107), при этом $\bar{b} > 0$, а значение $\bar{\beta}$ может в этом неоднородном случае становиться и отрицательным $\bar{\beta} < 0$ (6.109).

При **малой** плотности струн $\eta \rightarrow 0$, как показано в приложении 6.1, возможны два различных предельных случая:

1. Удерживая постоянным $M = const$, мы имеем $N \rightarrow 1$ (поскольку конфигурации с $N = 0$, не рассматриваются как события), при этом как p_t-n , так и $n-n$ корреляции исчезают.

2. Удерживая постоянным $\bar{N} = const$, мы имеем $M \rightarrow \infty$, и, следовательно, струны будут удалены друг от друга в поперечной плоскости, что приводит к тем же результатам, как в случае без слияния струн [300], при этом (см. выше) $n-n$ корреляции возрастают и стремятся снизу к определенному ненулевому пределу $\mu_0\kappa/(\mu_0\kappa + 1)$, а p_t-n корреляции зануляются.

Подробнее предел малой плотности струн $\eta \rightarrow 0$ рассмотрен в приложении 6.1.

На рис. 6.1-6.3 для идеализированного случая с однородным распределением струн в плоскости прицельного параметра представлена зависимость коэффициентов $n-n$ и p_t^2-n корреляций $b_{n-n} = \bar{b}$ и $b_{p_t^2-n} = \bar{\beta}$ от средней плотности струн, характеризуемой безразмерным параметром η ($\eta = \rho^{str} \sigma_0$ - среднее число струн, приходящееся на площадь σ_0 одной струны). Результаты представлены для трех значений параметра $\mu_0 = 1, 2$ и 4 (μ_0 - среднее число частиц, которое будет зарегистрировано в переднем быстротном окне при распаде одиночной струны.) Параметр κ мы пока считаем равным единице, так как κ везде входит в виде произведения $\mu_0\kappa$, то изменение κ может быть сведено к изменению μ_0 .

Сплошными линиями на этих рисунках показаны асимптотики коэффициентов $n-n$ и p_t^2-n корреляций, найденные в рамках дискретного варианта модели слияния струн в случае локального (6.110) и глобального (6.132) слияния при большой плотности струн $\eta \gg 1$ с использованием

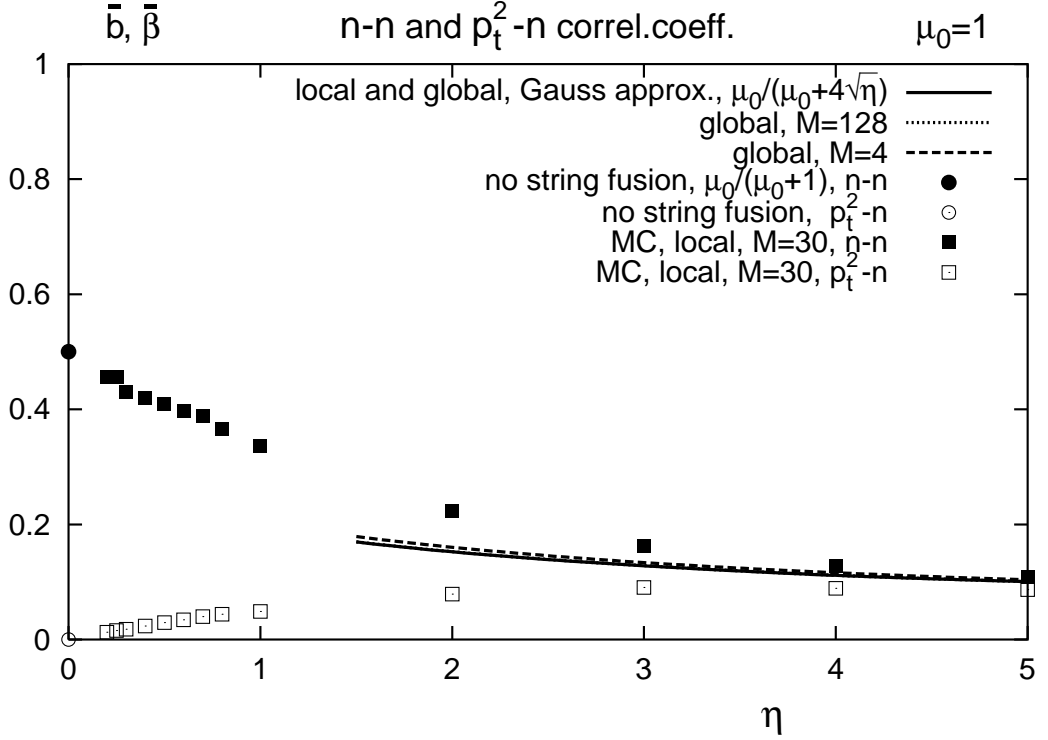


Рисунок 6.1: Коэффициенты n - n и p_t^2 - n корреляций $b_{n-n} = \bar{b}$ и $b_{p_t^2-n} = \bar{\beta}$ при $\mu_0 = 1$. Сплошная линия - гауссово приближение при $\eta \gg 1$ для локального и глобального слияния: $\bar{b} = \bar{\beta} = \mu_0 / (\mu_0 + 4\sqrt{\eta})$. Пунктирная и точечная кривые - результаты непосредственных вычислений по формулам (6.122)-(6.123) в случае глобального слияния при большой плотности струн (один кластер) для $M=4$ и $M=128$. ■ и □ - результаты прямых монте-карловских вычислений коэффициентов n - n и p_t^2 - n корреляций как функции плотности струн η по формулам (6.81)-(6.83) в случае локального слияния для $M=30$. ● и ○ - значения коэффициентов корреляции без слияния струн ($\eta \rightarrow 0$) [300]: $\bar{b} = \mu_0 / (\mu_0 + 1)$, $\bar{\beta} = 0$.

гауссова приближения, описанного в параграфе 6.2.5: $\bar{b} = \bar{\beta} = \mu_0 / (\mu_0 + 4\sqrt{\eta})$. Пунктирные и точечные кривые - результаты непосредственных вычислений по формулам (6.122)-(6.123) в случае глобального слияния при большой плотности струн, когда в плоскости прицельного параметра образуется один кластер для $M=4$ и $M=128$.

Точками ■ и □ на этих рисунках представлены результаты прямых монте-карловских вычислений коэффициентов n - n и p_t^2 - n корреляций по формулам (6.81)-(6.83) в случае локального слияния для $M=30$, которые позволяют найти значение этих коэффициентов при любой плотности струн, т.е. во всей области изменения параметра η .

Наконец точками ● и ○ на рисунках показаны предельные значения коэффициентов n - n и p_t^2 - n корреляций $\bar{b} = \mu_0 / (\mu_0 + 1)$ и $\bar{\beta} = 0$ при малой плотности струн ($\eta \rightarrow 0$), когда эффекты связанные со слиянием струн перестают давать вклад.

Видно, что в случае локального слияния при малой плотности струн

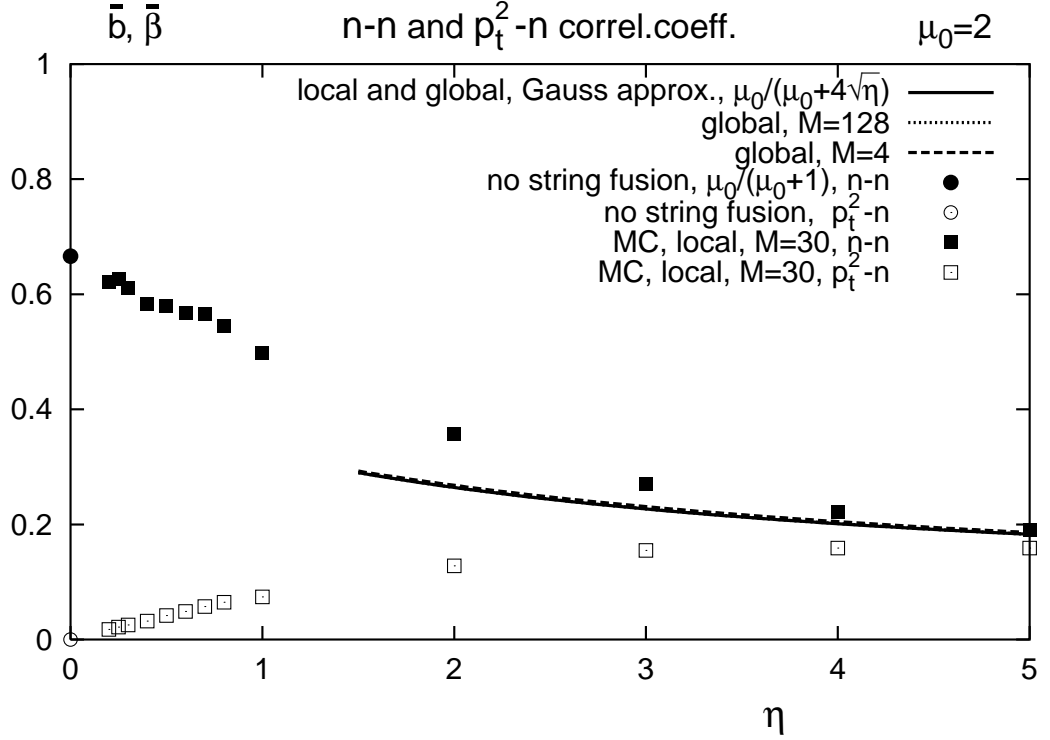


Рисунок 6.2: То же, что на рис. 6.1, но для $\mu_0=2$.

имеются сильные n - n корреляции (такие же как в модели без слияния струн [300]) и практически отсутствуют p_t^2 - n корреляции. (Анализ поведения коэффициентов при совсем малых значениях $\eta \leq 1/M$ см. в приложении 6.1.) С возрастанием плотности струн коэффициент n - n корреляций убывает, а коэффициент p_t^2 - n корреляций возрастает. При большой однородной плотности струн $\eta \gg 1$ коэффициенты p_t^2 - n и n - n корреляций становятся равными и имеет место скейлинг по $\mu_0/\sqrt{\eta}$.

Также видно, что в этом пределе наша гауссова асимптотика $\bar{b}=\bar{\beta}=\mu_0/(\mu_0+4\sqrt{\eta})$ находится в хорошем согласии с результатами численных МК расчетов и имеет место независимость результатов от числа ячеек M . То есть для однородного распределения струн со средней плотностью $\eta = \bar{N}/M$ коэффициенты корреляции не зависят по отдельности от общего среднего числа струн \bar{N} и числа ячеек M , а только от средней плотности струн $\eta = \bar{N}/M$ (' M -скейлинг'). Более того коэффициенты корреляции в этом пределе $\eta \gg 1$ не зависят по отдельности от μ_0 и η , а только от одной их комбинации $\mu_0/\sqrt{\eta}$ (' $\mu_0/\sqrt{\eta}$ -скейлинг').

Из сравнения наших гауссовых асимптотик (сплошные кривые) с результатами непосредственных вычислений по формулам (6.122)-(6.123) (пунктирные и точечные кривые) в случае глобального слияния при большой плотности струн для $M=4$ и $M=128$ видно, что в этом случае гауссово приближение работает очень хорошо и $\mu_0/\sqrt{\eta}$ -скейлинг не является атрибутом единственно этого приближения. Видно также, что при боль-

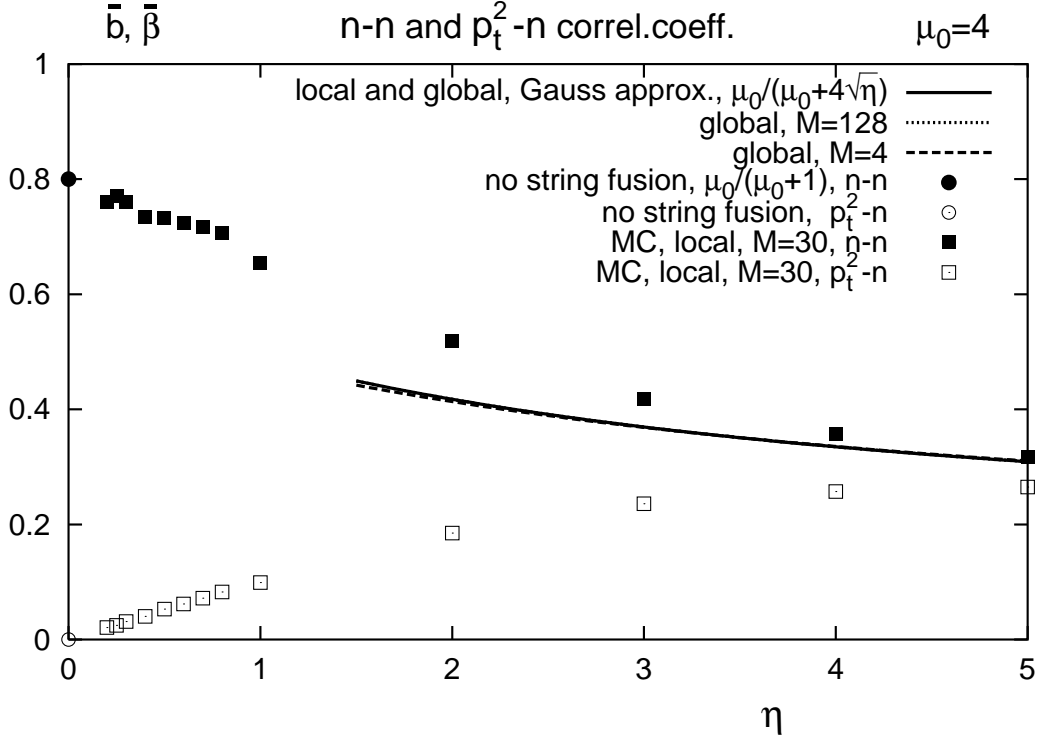


Рисунок 6.3: То же, что на рис. 6.1, но для $\mu_0=4$.

ших η независимость коэффициентов корреляции $\bar{\beta}$ и \bar{b} от M наступает очень рано, уже при $M=4$.

Отметим, что результаты, полученные в нашем дискретном подходе находятся в хорошем согласии с результатами вычислений в рамках реальной модели слияния струн, включающей рассмотрение детальной геометрической картины пересечения струн [302, 306].

6.2.10 Дальние p_t - p_t корреляции

Переходя к анализу дальних p_t - p_t корреляций, прежде всего подчеркнем, что если определить эти корреляции, как это обычно делается (см., например, [237, 223]), как парные корреляции между поперечными импульсами двух частиц, одна из которых принадлежит заднему, а другая переднему быстротному интервалу, то как было показано в нашей работе [302] величина таких корреляций оказывается обратно пропорциональна среднему общему числу струн ($\sim 1/\bar{N}$). В результате величина этих 'дважды инклюзивных' корреляций стремится к нулю с ростом числа струн и поэтому чрезвычайно мала для случая ядро-ядерных столкновений при высоких энергиях, в которых общее число струн может достигать нескольких тысяч.

Поэтому в работах [309]-[311] было предложено в качестве динамических переменных, между которыми изучаются дальние корреляции, вы-

бирать не поперечные импульсы двух отдельных частиц в этих быстротных интервалах, а среднее (в данном событии!) значение поперечного импульса p_t , (6.65) всех заряженных частиц рожденных в данном событии в заднем (p_{tB}) и переднем (p_{tF}) быстротном интервалах. В наших работах [306, 307] было показано, что коэффициент $b_{p_t-p_t}$ (6.67), так определенных дальних p_t-p_t корреляций, уже не стремится к нулю с ростом общего числа струн (см. ниже), и такие корреляции действительно обнаруживаются [312] в ядро-ядерных столкновениях при высоких энергиях.

Аналогичным свойством обладает и коэффициент $b_{p_t^2-p_t^2}$ (6.70) дальних $p_t^2-p_t^2$ корреляций, когда в качестве динамических переменных, между которыми изучаются дальние корреляции, выбирается среднее значение квадрата поперечного импульса всех заряженных частиц рожденных в данном событии в заднем (p_{tB}^2) и переднем (p_{tF}^2) быстротном интервалах (6.69).

С физической точки зрения причина этого ясна. Как мы уже отмечали, дальние FB корреляции возникают только благодаря флуктуациям струнной конфигурации C от события к событию (см. формулу (6.74)). Данные о поперечном импульсе одной частицы в переднем быстротном окне слабо скоррелированы с характером струнной конфигурации, реализовавшейся в этом событии, и как следствие не скоррелированы с величиной поперечного импульса частицы, рождающейся в этом событии в заднем быстротном окне. Данные же о среднем поперечном импульсе всех частицы рожденных в данном событии в переднем быстротном окне содержат гораздо больше информации о реализовавшейся струнной конфигурации. Поэтому классификация событий по этой характеристике приводит к зависимости от нее величины среднего поперечного импульса частиц рожденных в данном событии в заднем окне, то есть к дальним FB корреляциям.

В теоретическом плане задача нахождения асимптотик коэффициентов p_t-p_t и $p_t^2-p_t^2$ корреляций оказывается более сложной задачей, чем нахождение асимптотик коэффициентов $n-n$ и p_t^2-n корреляций описанное выше, даже в рамках простого дискретного аналога модели слияния струн. Дело здесь заключается в том, что теперь в числитель и знаменатель формулы (6.75) определяющей, например, корреляционную функцию $\langle p_{tB} \rangle_{p_{tF}}$ будет входить $P_C(p_{tF})$ - вероятность того, что для данной струнной конфигурации C среднее значение поперечного импульса (6.65) всех частицы рожденных в данном событии в переднем быстротном окне окажется равным p_{tF} . Теоретически ее найти гораздо сложнее, чем вероятность $P_C(n_F)$, которая входила в эту формулу (6.81) в случае $n-n$ и p_t^2-n корреляций.

В рамках дискретного варианта модели слияния струн, который мы рассматриваем в настоящем разделе, эту вероятность можно представить в следующем виде (для случая локального слияния):

$$P_C(p_{tF}) \equiv P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(p_{tF}) = \sum_{\{n_1, \dots, n_M\}} P_{\eta_1, \dots, \eta_M}^{n_1, \dots, n_M}(p_{tF}) \prod_{i=1}^M \rho_{\eta_i}(n_i), \quad (6.133)$$

где $P_{\eta_1, \dots, \eta_M}^{n_1, \dots, n_M}(p_{tF})$ - условная вероятность того, что для данной струнной конфигурации C среднее значение поперечного импульса (6.65) всех частицы рожденных в данном событии в переднем быстротном окне окажется равным p_{tF} при условии, что при этом от i -той ячейки родилось в переднем быстротном окне n_i частиц. $\rho_{\eta_i}(n_i)$ - вероятность образования n_i частиц от i -той ячейки, где наложились η_i струн. Согласно предположениям модели (6.72):

$$\langle n_i \rangle_{\eta_i} \equiv \sum_{n_i=0}^{\infty} n_i \rho_{\eta_i}(n_i) = \mu_0 \sqrt{\eta_i} \quad \text{и} \quad \overline{p_i^2} \equiv \langle p_{ti}^2 \rangle_{\eta_i} = \overline{p^2} \sqrt{\eta_i}, \quad (6.134)$$

где $\overline{p^2}$ - средний квадрат импульса частиц, рожденных от распада одиночной струны (ячейки с $\eta_i = 1$). Для любого однопараметрического распределения по импульсу для частиц, рожденных от распада одиночной струны, можно доказать, что

$$\overline{p_i} \equiv \langle p_{ti} \rangle_{\eta_i} = \overline{p} \sqrt{\eta_i} \quad \text{и} \quad \sigma_i^2 \equiv \overline{p_i^2} - \overline{p_i}^2 = \sigma_p^2 \sqrt{\eta_i}, \quad (6.135)$$

где

$$\sigma_p^2 \equiv \overline{p^2} - \overline{p}^2 \quad (6.136)$$

- импульсная дисперсия частиц, рожденных от распада одиночной струны.

Ключевое соображение, которое позволяет решить рассматриваемую задачу, состоит в том, что согласно определению (6.65) p_{tF} есть среднее значение модулей поперечных импульсов всех n_F частиц, рожденных в переднем быстротном окне. При большом числе этих частиц в силу центральной предельной теоремы теории вероятности, вне зависимости от вида распределений по импульсу для частиц, рожденных от распада отдельных ячеек, результирующее распределение по среднему импульсу p_{tF} этих частиц будет гауссовым со средним импульсом \overline{p}_{tF} равным сумме средних импульсов деленной на n_F и дисперсией $\sigma_{p_{tF}}$ равной сумме дисперсий деленной на n_F^2 :

$$P_{\eta_1, \dots, \eta_M}^{n_1, \dots, n_M}(p_{tF}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{p_{tF}}} \exp \left[-\frac{(p_{tF} - \overline{p}_{tF})^2}{2\sigma_{p_{tF}}^2} \right], \quad (6.137)$$

где с учетом (6.135) и $n_F = \sum_{i=1}^M n_i$:

$$\bar{p}_{tF} = \frac{1}{n_F} \sum_{i=1}^M n_i \bar{p}_i = \frac{\bar{p}}{n_F} \sum_{i=1}^M n_i \sqrt[4]{\eta_i} \quad \text{и} \quad \sigma_{p_{tF}}^2 = \frac{1}{n_F^2} \sum_{i=1}^M n_i \sigma_i^2 = \frac{\sigma_p^2}{n_F^2} \sum_{i=1}^M n_i \sqrt{\eta_i} . \quad (6.138)$$

Формулы (6.133)-(6.138) позволяют построить монте-карловский алгоритм вычисления p_t - p_t корреляций по формуле:

$$\langle p_{tB} \rangle_{p_{tF}} = \frac{\sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} \langle p_{tB} \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} W(\eta_1, \dots, \eta_M) P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(p_{tF})}{\sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} W(\eta_1, \dots, \eta_M) P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(p_{tF})} , \quad (6.139)$$

вытекающей из (6.75) и аналогичной (6.81), где вместо (6.83) согласно (6.135) нужно использовать:

$$\langle p_{tB} \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} = \sum_{i=1}^M \frac{\sqrt{\eta_i}}{\sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i}} \bar{p} \sqrt[4]{\eta_i} = \bar{p} \frac{\sum_{i=1}^M \eta_i^{\frac{3}{4}}}{\sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i}} . \quad (6.140)$$

Здесь $\sqrt{\eta_i}/(\sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i})$ - вероятность рождения частицы из ячейки η_i , а $\bar{p} \sqrt[4]{\eta_i}$ - средний поперечный импульс частиц, рожденных из этой ячейки. Совершенно аналогично можно построить МК алгоритм вычисления корреляционной функции $\langle p_{tB}^2 \rangle_{p_{tF}^2}$ для вычисления коэффициента p_t^2 - p_t^2 корреляций $b_{p_t^2-p_t^2}$ (6.70).

Ввиду большей сложности этих формул явно вычислить асимптотики коэффициентов p_t - p_t и p_t^2 - p_t^2 корреляций удастся только в самом простом случае, рассмотренном нами для n - n и p_t^2 - n корреляций в параграфе 6.2.8 [301], когда при большой плотности струн ($\bar{N}/M = \eta \gg 1$) в случае их глобального слияния в плоскости прицельного параметра образуется единый кластер. Вычисления, аналогичные проведенным в параграфе 6.2.8 [301], приводят к следующим результатам [307]:

$$b_{p_t-p_t} = \frac{\mu_{0F}}{\mu_{0F} + 16\gamma^2 \sqrt{\eta}} \quad \text{и} \quad b_{p_t^2-p_t^2} = \frac{\mu_{0F}}{\mu_{0F} + 4\tilde{\gamma}^2 \sqrt{\eta}} . \quad (6.141)$$

В последней формуле в качестве динамических переменных в переднем (Δy_F) и заднем (Δy_B) быстротных окнах, между которыми изучаются дальние ФВ корреляции, выбраны p_{tF}^2 и p_{tB}^2 (6.69).

В этих формулах γ - коэффициент пропорциональности между средним поперечным импульсом \bar{p} и квадратным корнем из дисперсии p для одиночной струны (6.136): $\sigma_p = \gamma \bar{p}$, а $\tilde{\gamma}$ то же самое для p^2 : $\sigma_{p^2} = \tilde{\gamma} \bar{p}^2$, т.е. γ и $\tilde{\gamma}$ - это некоторые безразмерные коэффициенты, величина которых зависит от конкретного вида распределения по импульсу частиц рожденных от распада одиночной струны. Для распределений, используемых при аппроксимации экспериментальных данных, величина этих

коэффициентов оказывается порядка единицы. Для трех видов распределения $\varphi(p)$ ($2\pi \int \varphi(p) p dp = 1$) по поперечному импульсу $p \equiv |\mathbf{p}_\perp|$ значения γ и $\tilde{\gamma}$ приведены в таблице 6.4. Они не зависят от величины размерного коэффициента a и нормировочных множителей, входящих в эти распределения.

$\varphi(p)$	γ	$\tilde{\gamma}$
$\sim \exp(-p^2/a^2)$	$\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$	1
$\sim \exp(-p/a)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{7}{3}}$
$\sim [a/(a+p)]^m$	$\sqrt{\frac{m-1}{2(m-4)}}$	$\sqrt{\frac{(m-1)(7m-30)}{3(m-5)(m-6)}}$

Таблица 6.4: Величина коэффициентов $\gamma \equiv \sigma_p/\bar{p}$ и $\tilde{\gamma} \equiv \sigma_{p^2}/\bar{p}^2$ для различных распределений $\varphi(p)$ по поперечному импульсу p

Отметим, что в (6.141) мы представили результаты для общего случая $\mu_{0B} \neq \mu_{0F}$, когда средняя множественность частиц μ_0 , образующихся от распада одиночной струны в заднем и переднем быстротных интервалах может быть разная. Это может быть, например, в силу разной длины этих быстротных интервалов, т.к. ясно, что $\mu_0 \sim \Delta y$. Важно подчеркнуть, что как видно из (6.141), в рассматриваемой модели, где длина струн считается неограниченной, коэффициенты корреляции зависят от величины μ_{0F} и, следовательно, от длины переднего быстротного окна Δy_F , и не зависят от величины μ_{0B} или Δy_B .

С физической точки зрения причина этого опять заключается в том, что как мы уже отмечали, дальние ФВ корреляции возникают только благодаря флуктуациям струнной конфигурации C от события к событию (см. формулу (6.74)). Классификация событий для определения корреляционной функции $\langle B \rangle_F$ происходит по переменной F , определяемой из характеристик частиц, регистрируемых в переднем быстротном окне Δy_F . Чем оно длиннее, тем больше будет этих частиц, и тем точнее такая классификация будет соответствовать классификации по типу струнной конфигурации реализовавшейся в данном событии. Поскольку струнные конфигурации разных типов отвечают разным средним значениям B в заднем быстротном окне, то это будет означать и большую скоррелированность между значениями F и $\langle B \rangle_F$ для данного класса событий (см. подробнее в [300]). Ясно, что этим же свойством обладают и вычисленные нами выше [301, 302] при $\eta \gg 1$ асимптотики коэффициентов n - n и

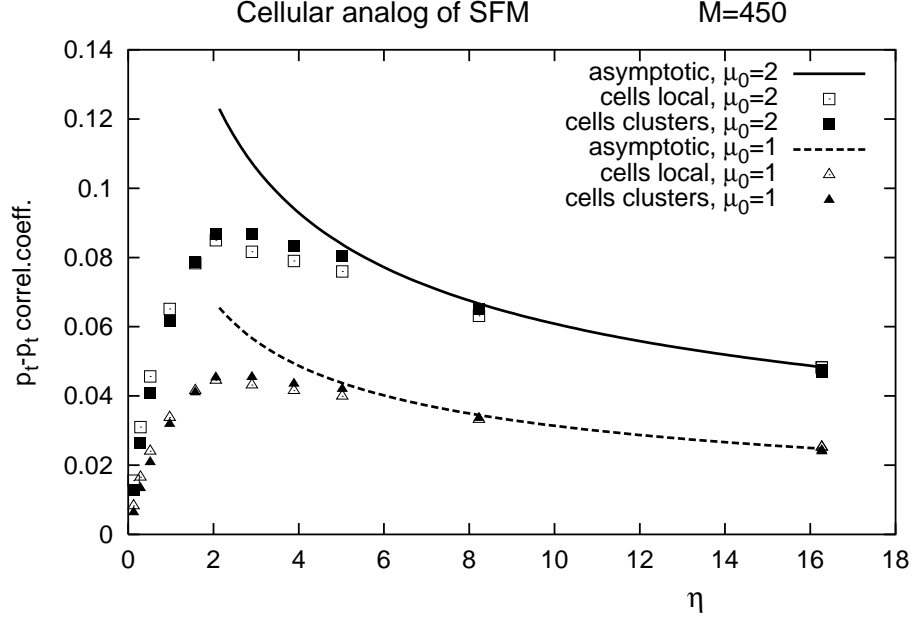


Рисунок 6.4: Сравнение асимптотик коэффициента p_t-p_t корреляций $b_{p_t-p_t}$ (6.141) с результатами прямых МК вычислений [307] по формулам (6.133)-(6.140) в рамках дискретного аналога модели слияния струн для случая их постоянной средней плотности $\eta = \sigma_0 \rho^{str}$ при двух значениях параметра $\mu_{0F} \equiv \mu_0 = 1$ и 2 (см. подробности в тексте). Общее число ячеек $M=450$.

p_t-n корреляций. При $\mu_{0B} \neq \mu_{0F}$ они имеют вид:

$$b_{n-n} = b_{p_t^2-n} = \frac{\mu_{0F}}{\mu_{0F} + 4\sqrt{\eta}} \quad \text{и} \quad b_{p_t-n} = \frac{1}{2} \frac{\mu_{0F}}{\mu_{0F} + 4\sqrt{\eta}}. \quad (6.142)$$

Это свойство справедливо и при отсутствии слияния струн, что соответствует пределу $\eta \rightarrow 0$ (см. приложение 6.1). В этом случае из всех рассматриваемых корреляций отличны от нуля только $n-n$ корреляции [300]:

$$b_{n-n} = \frac{\mu_{0F}}{\mu_{0F} + 1}. \quad (6.143)$$

Из сравнения (6.141) и (6.142) также видно, что коэффициенты p_t-p_t и $p_t^2-p_t^2$ корреляций при $\eta \gg 1$ демонстрируют тот же $\mu_0/\sqrt{\eta}$ -скейлинг, т.е. их асимптотики, также как и асимптотики коэффициентов $n-n$ и p_t-n корреляций зависят только одной этой комбинации параметров μ_0 и η .

На рис. 6.4 и 6.5 приведено сравнение [307] асимптотик коэффициента p_t-p_t корреляции $b_{p_t-p_t}$ (6.141) с результатами прямых монте-карловских вычислений в рамках дискретного аналога модели слияния струн по формулам (6.133)-(6.140) для случая их постоянной средней плотности $\eta = \sigma_0 \rho^{str}$ при двух значениях параметра $\mu_{0F} \equiv \mu_0 = 1$ и 2. Общее число ячеек равно, соответственно, $M=450$ и $M=45$. Видно, что при $\eta > 5$ результаты этих МК расчетов как в случае локального, так и глобального слияния струн, практически совпадают с асимптотикой. Из сравнения рис. 6.4

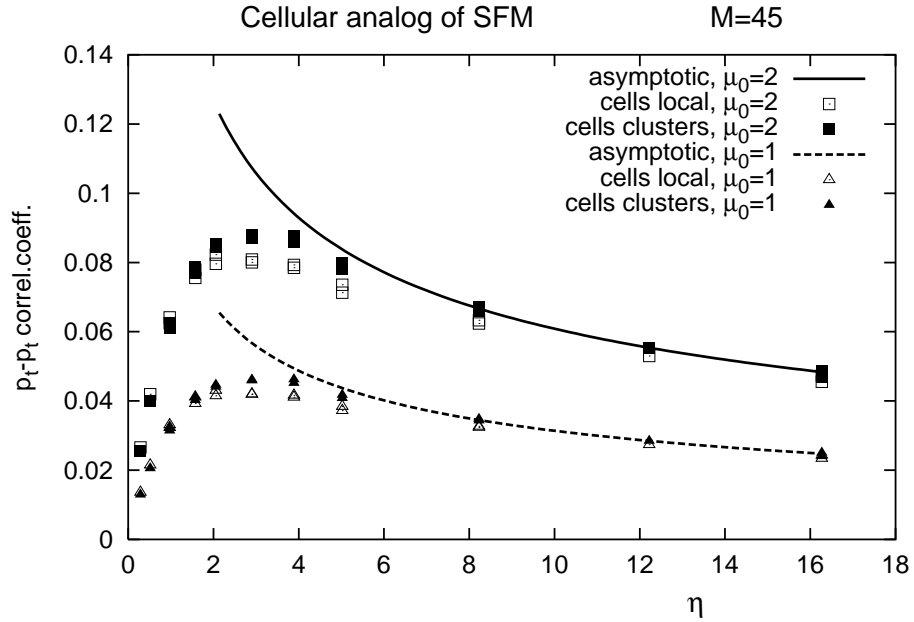


Рисунок 6.5: То же, что на рис. 6.4, но для $M=45$.

и 6.5 также видно, что коэффициент p_t-p_t корреляций зависит не от общего числа ячеек M , а только от плотности струн $\eta = \bar{N}/M = \sigma_0 \rho^{str}$ как и в случае $n-n$ и p_t^2-n корреляций (см. параграф 6.2.9).

На рис. 6.6 приведено сравнение этих же асимптотик коэффициента $b_{p_t-p_t}$ (6.141) с результатами его прямых МК вычислений, но уже в рамках исходной модели слияния струн, с учетом детальной геометрии их перекрытия (см. параграф 6.2.1). Рассмотрены также два случая - локального и глобального слияния. Видно хорошее согласие результатов этих расчетов с асимптотикой при $\eta > 5$. Для иллюстрации независимости коэффициента p_t-p_t корреляций от общего числа струн на рис. 6.6 одновременно приведены результаты МК расчетов для среднего числа струн $\bar{N}=1000, 4000$ и 8000 . Опять видно, что коэффициент $b_{p_t-p_t}$ зависит не от общего числа струн \bar{N} , а только от их плотности $\eta = \sigma_0 \rho^{str}$.

Хотелось бы еще раз подчеркнуть, что этот результат мы получили только благодаря тому, что перешли к изучению дальних FВ корреляций между средними значениями (см. (6.65) и (6.69)) поперечных импульсов всех частиц, рожденных в данном событии в переднем и заднем быстрой интервалах. Для обычно изучаемых парных корреляции между поперечными импульсами двух отдельных частиц в этих интервалах (типа известных НВТ корреляций, см., например, [223, 237, 243]), нами было показано [302], что величина этих корреляций обратно пропорциональна среднему числу струн ($\sim 1/\bar{N}$). В результате величина таких 'дважды инклюзивных' корреляций стремится к нулю с ростом числа струн и поэтому чрезвычайно мала для случая ядро-ядерных столкновений при вы-

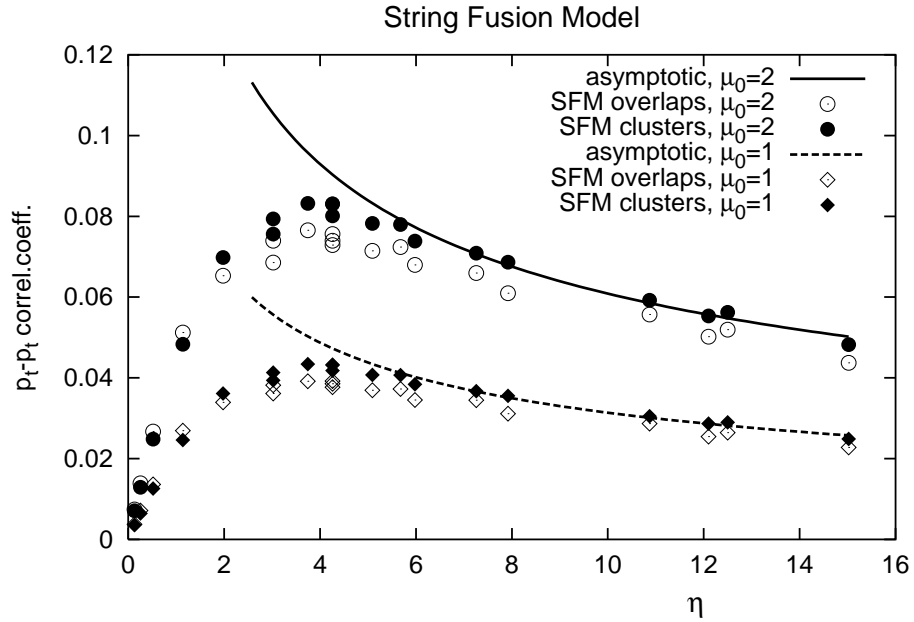


Рисунок 6.6: То же, что на рис. 6.4, но для результатов МК вычислений в рамках исходной модели слияния струн для случая их локального (overlaps - 'перекрытия') и глобального (clusters - 'кластеры') слияния (см. параграф 6.2.1, [302]). Приведены точки для среднего числа струн $\bar{N}=1000, 4000$ и 8000 .

соких энергиях.

Сравнивая рис. 6.6 с рис. 6.4 и 6.5, мы также видим, что МК расчеты коэффициента p_t-p_t корреляций, выполненные в рамках исходной модели слияния струн и в рамках ее предлагаемого дискретного аналога, дают практически совпадающие результаты при всех значениях плотности струн $\rho^{str} = \eta/\sigma_0$. То же имеет место и для $n-n$ и p_t^2-n корреляций [302, 306].

Что касается применения описанных выше МК алгоритмов для расчета коэффициентов корреляции в случае реальных ядерных AB -столкновений, то здесь, прежде всего, необходимо учесть неравномерность распределения средней плотности струн в поперечной плоскости (\mathbf{s}), что можно сделать, зная профильные функций сталкивающихся ядер $T_A(\mathbf{s} + \mathbf{b}/2)$ и $T_B(\mathbf{s} - \mathbf{b}/2)$, например, в рамках приближения Глаубера-Ситенко [253]-[259]. Соответствующая процедура изложена нами в приложении в работе [309].

Однако, этого не достаточно. Оказывается (см. [306, 307]), гораздо более сильное влияние, чем неравномерность распределения средней плотности струн в поперечной плоскости, на коэффициенты дальних FВ корреляций оказывают неизбежные (принципиально неустранимые) в эксперименте флуктуации прицельного параметра b на уровне порядка нескольких Ферми, которые существенно (в разы) изменяют величину коэффициентов всех дальних корреляций по сравнению с их значениями,

вычисленными при строго фиксированных значениях прицельного параметра [302].

Для корректного учета влияния этих флуктуаций в рамках предложенных выше МК алгоритмов мы расширили [306] понятие конфигураций $C = \{\eta_1, \dots, \eta_M\}$, по которым производится суммирование в формулах (6.75), (6.81) и (6.139), включив в него $(C \rightarrow C' = \{\eta_1, \dots, \eta_M; b\})$ и значение прицельного параметра b , разыгрываемое перед каждым событием в определенном интервале. Результаты МК расчетов коэффициентов дальних ФВ корреляций для случая реальных ядро-ядерных столкновений с учетом флуктуации прицельного параметра, иллюстрирующие это положение, приведены в [303, 306, 307].

6.2.11 Заключение

Таким образом в этом разделе предложена простая дискретная модель для описания дальних ФВ корреляций p_t и множественности в ядро-ядерных столкновениях при высоких энергиях, происходящая из модели слияния струн. Эта модель позволяет провести явные аналитические вычисления корреляционных функций в некоторых асимптотических случаях и способна упростить вычисления в случае реальных ядерных столкновений, что является весьма актуальным в свете начавшихся в США и планируемых в Европе экспериментов по столкновению тяжелых ионов при сверхвысоких энергиях на суперколлайдерах RHIC и LHC. Как и в случае исходной модели слияния струн, рассмотрено два варианта ее дискретного аналога: с локальным и с глобальным слиянием струн.

На основе этой модели предложено теоретическое описание дальних ФВ корреляций между величинами, наблюдаемыми в двух разделенных по быстроте (рапидити) интервалах. Изучены три типа таких дальних корреляций: (1) n - n - корреляции между множественностью заряженных частиц в этих быстротных интервалах, (2) p_t - p_t - корреляции между поперечными импульсами в этих интервалах и (3) p_t - n - корреляции между поперечным импульсом в одном быстротном интервале и множественностью заряженных частиц в другом.

Для идеализированного случая с однородным распределением струн в плоскости прицельного параметра в рамках дискретного варианта модели аналитически вычислены асимптотики коэффициентов корреляции при большой и малой плотности струн.

Показано, что коэффициенты p_t^2 - n и n - n корреляций зависят не от общего числа струн \bar{N} , а только от их средней плотности ρ^{str} в плоскости прицельного параметра, характеризуемой безразмерным параметром $\eta =$

$\rho^{str} \sigma_0$ (σ_0 - площадь поперечного сечения струны).

Более того при большой плотности струн $\eta \gg 1$ коэффициенты p_t^2-n и $n-n$ корреляций обладают одинаковым асимптотическим поведением, причем имеет место скейлинг. Коэффициент корреляции зависит только от единственной комбинации $\mu_0/\sqrt{\eta}$ переменных, где μ_0 - среднее число частиц, испускаемых единичной струной. Отдельно в приложении 6.1 детально проанализировано поведение p_t^2-n и $n-n$ корреляций при малой плотности струн.

Для p_t-p_t корреляций показано, что корреляции от события к событию между средними величинами поперечного импульса всех частиц, испущенных в данном событии в двух разных по быстроте интервалах, также не зависят от общего числа струн \bar{N} , в отличие от обычно изучаемых парных корреляций между поперечными импульсами двух отдельных частиц в этих интервалах, величина которых, как показано нами в [302], обратно пропорциональна среднему числу струн ($\sim 1/\bar{N}$) и стремятся к нулю с ростом числа струн.

Для случая однородного распределением струн в поперечной плоскости найдена асимптотика коэффициента p_t-p_t корреляции, когда в рамках механизма глобального слияния при большой плотности струн образуется единый кластер. Показано, что в этом случае также имеет место $\mu_0/\sqrt{\eta}$ -скейлинг (см. выше), как и в случае p_t^2-n и $n-n$ корреляций.

Проведено сравнение найденных асимптотик с результатами прямых монте-карловских вычислений коэффициентов корреляции, как в рамках исходной модели слияния струн, так и в рамках предлагаемого ее простого дискретного аналога. Расчеты методом Монте-Карло позволяют найти значение этих коэффициентов при любой плотности струн, т.е. во всей области изменения параметра η . Показано, что предсказания модели слияния струн и ее дискретного аналога практически совпадают при любой плотности струн, и что поведение коэффициентов корреляции, вычисленных монте-карловским методом, хорошо согласуется с найденными асимптотическими формулами.

Это позволило использовать найденные асимптотики коэффициентов корреляции для отладки и контроля монте-карловских алгоритмов, дающих возможность проводить вычисления корреляционных функций для случая реальных ядерных столкновений - с учетом реалистического распределения струн в поперечной плоскости и с учетом флуктуаций прицельного параметра от события к событию.

Предложения [297, 306, 307],[309]-[312] по исследованию дальних FB корреляций в pp и AA взаимодействиях на суперколлайдере LHC, создаваемом в ЦЕРНе, вошли в программу физических исследований экспери-

мента ALICE [313].

В заключение, отметим, что, как мы уже упоминали, формулы (6.61) и (6.62), используемые в наших расчетах для описания процесса слияния струн в рамках полуфеноменологической модели взаимодействующих струн [89], приводят в мягкой области к уменьшению множественности и росту среднего поперечного импульса заряженных частиц в AA столкновениях [90, 235, 237], в согласии с экспериментальными данными, полученными на коллайдере RHIC [238, 239]. Вид этих зависимостей хорошо согласуются с аналогичными результатами [261], полученными в жесткой области на основе теории возмущений КХД в рамках модели жесткого померона Балицкого-Фаина-Кураева-Липатова [72]-[74].

Приложение 6.1

Дальние корреляции при малой плотности струн

В этом приложении мы вычисляем корреляционные функции и коэффициенты p_t^2-n и $n-n$ корреляций при малой плотности струн в случае локального их слияния.

Для простоты рассмотрим "однородный" случай, когда все $\bar{\eta}_i = \eta$ равны друг другу во всей области взаимодействия. Будем предполагать, что в каждой ячейке i ($i = 1, \dots, M$) η_i флуктуируют относительно этого среднего значения η согласно распределению Пуассона ($\rho_a(x)$ - распределение Пуассона с $\bar{x} = a$):

$$w(\eta_i) = \rho_\eta(\eta_i) \equiv e^{-\eta} \frac{\eta^{\eta_i}}{\eta_i!}. \quad (6.144)$$

Мы предположим также пуассонову форму зависимости для $p_{\eta_i}(n_i)$:

$$p_{\eta_i}(n_i) = \rho_{\mu_0 \sqrt{\eta_i}}(n_i) \equiv e^{-\mu_0 \sqrt{\eta_i}} \frac{(\mu_0 \sqrt{\eta_i})^{n_i}}{n_i!} \quad (6.145)$$

и, следовательно, будем иметь распределение Пуассона для

$$P_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}}(n_F) = \rho_{\mu_0 \sum_i \sqrt{\eta_i}}(n_F), \quad (6.146)$$

с $\langle n_F \rangle_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} = \mu_0 \sum_i \sqrt{\eta_i} = \mu_0 r = \langle n_F \rangle_r$.

Тогда из (6.81) находим для $n-n$ корреляций:

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \frac{\mu_0 \sum'_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} r (\prod_i w(\eta_i)) \rho_{\mu_0 r}(n_F)}{\sum'_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} (\prod_i w(\eta_i)) \rho_{\mu_0 r}(n_F)} \quad (6.147)$$

и для p_t^2 - n корреляций:

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \frac{\overline{p^2} \sum'_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} \frac{N}{r} (\prod_i w(\eta_i)) \rho_{\mu_0 r}(n_F)}{\sum'_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} (\prod_i w(\eta_i)) \rho_{\mu_0 r}(n_F)} \quad (6.148)$$

Напомним, что $N = \sum_{i=1}^M \eta_i$ - число струн в данном событии, а $r = \sum_{i=1}^M \sqrt{\eta_i}$. В M -кратных суммах (6.147) и (6.148) необходимо опустить один член, соответствующий обращению в нуль всех $\eta_i = 0$, который соответствует отсутствию неупругого взаимодействия между нуклонами сталкивающихся ядер (мы отмечаем этот факт штрихом у знака суммы: Σ').

Вероятность $P(n_F)$ зарегистрировать n_F частиц в переднем окне по быстроте, которая входит в знаменатели (6.147) и (6.148), равна

$$P(n_F) = C \sum'_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} \left(\prod_i w(\eta_i) \right) \rho_{\mu_0 r}(n_F), \quad (6.149)$$

где, согласно условию нормировки, имеем

$$C = \frac{1}{1 - w^M(0)} = \frac{1}{1 - e^{-M\eta}}. \quad (6.150)$$

Очевидно, множитель C сокращается в числителе и знаменателе (6.147) и (6.148), однако, если мы вычислим среднее число струн \overline{N} , то получим

$$\overline{N} = C \sum'_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} \left(\prod_i w(\eta_i) \right) N = C \sum'_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} \left(\prod_i w(\eta_i) \right) \left(\sum_i \eta_i \right) = \frac{M\eta}{1 - e^{-M\eta}} \quad (6.151)$$

и для $\langle n_F \rangle$ при малых $\eta \ll 1$ найдем

$$\langle n_F \rangle = \sum_{n_F} n_F P(n_F) = C \mu_{0F} \sum'_{\{\eta_1, \dots, \eta_M\}} \left(\prod_i w(\eta_i) \right) r = \mu_{0F} \frac{M\eta}{1 - e^{-M\eta}} = \mu_{0F} \overline{N}, \quad (6.152)$$

поскольку для любого $\omega > 0$ имеем $\sum_{\eta_i} \eta_i^\omega w(\eta_i) = \eta + O(\eta^2)$ при $\eta \rightarrow 0$, так как главный вклад возникает от члена $\eta_i = 1$.

При $\eta \rightarrow 0$ имеются две возможности:

1. $M = const$ и следовательно $M\eta \rightarrow 0$ и $\overline{N} \rightarrow 1$ (см. (6.151))
2. $\overline{N} = const$ и следовательно $M\eta = const$ (см. (6.151)) и $M \rightarrow \infty$

Мы исследуем обе эти возможности.

Первый предел соответствует $N = \overline{N} = 1$ (поскольку конфигурации с $N = 0$ не рассматриваются как события). Ясно, что в этом случае не

будет ни p_t-n , ни $n-n$ корреляций, так как не будет флуктуаций числа струн (см. формулу (6.74), а также обсуждение в первом разделе этой главы в параграфе 6.1.1 и после формулы (6.25)). Детальные вычисления приведены ниже.

Во втором пределе при $\bar{N} = const$ мы имеем флуктуации числа струн N вокруг \bar{N} , однако, в пределе $\eta \rightarrow 0$ число ячеек $M \rightarrow \infty$, и струны будут в среднем сильно разнесены в области взаимодействия, и как следствие вклада от эффекта слияние струн не будет. В результате, в этом пределе получим те же результаты, как и в случае отсутствия слияния струн, рассмотренном в [300]: сильные $n-n$ корреляции с коэффициентом корреляции равным $b = \mu_0/(\mu_0 + 1)$, и отсутствие p_t^2-n корреляций (см. вычисления ниже).

Детальные вычисления. Оценим M -кратные суммы в (6.147) и (6.148) при $\eta \rightarrow 0$, удерживая члены порядка $(M\eta)^k$, $(M\eta)^k\eta$ при произвольных k и опуская члены порядка $(M\eta)^k\eta^2$ и выше.

Члены порядка $(M\eta)^k$ возникают в слагаемых сумм в (6.147) и (6.148) при $\eta_{i_1} = \dots = \eta_{i_k} = 1$ и остальных $\eta_i = 0$. Члены порядка $(M\eta)^k\eta$ возникают из слагаемых (6.147) и (6.148) при $\eta_{i_1} = 2$, $\eta_{i_2} = \dots = \eta_{i_k} = 1$ и остальных $\eta_i = 0$. Помня об этом, получаем для $P(n_F)$:

$$P(n_F) = C(G_0 + \frac{\eta}{2}G_1) \quad (6.153)$$

и для $n-n$ корреляций:

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \mu_{0B} \frac{N_0 + \frac{\eta}{2}N_1}{G_0 + \frac{\eta}{2}G_1}. \quad (6.154)$$

Для p_t^2-n корреляций имеем:

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \frac{\bar{p}^2}{p^2} \frac{P_0 + \frac{\eta}{2}P_1}{G_0 + \frac{\eta}{2}G_1} = \bar{p}^2 \left(1 + \frac{\eta}{2} \frac{P_1 - G_1}{G_0} \right) \quad (6.155)$$

Здесь

$$G_0 = P_0 = \sum_{k=1}^M C_M^k \eta^k \rho_{\mu_0 k}(n_F), \quad (6.156)$$

$$N_0 = \sum_{k=1}^M k C_M^k \eta^k \rho_{\mu_0 k}(n_F),$$

$$G_1 = \sum_{k=1}^M k C_M^k \eta^k \rho_{\mu_0(k+\gamma)}(n_F),$$

$$N_1 = \sum_{k=1}^M (k + \gamma) k C_M^k \eta^k \rho_{\mu_0(k+\gamma)}(n_F),$$

$$P_1 = \sum_{k=1}^M \frac{k+1}{k+\gamma} k C_M^k \eta^k \rho_{\mu_0(k+\gamma)}(n_F) ,$$

где $\mu_0 \equiv \mu_{0F}$ и $\gamma = \sqrt{2} - 1$.

Заметим, что при $M \gg 1$ и $M\eta = \text{const}$ имеем для $P(n_F)$:

$$P(n_F) = C e^{-M\eta} \frac{\mu_0^{n_F}}{n_F!} (\bar{G}_0 + \frac{\eta}{2} e^{-\mu_0\gamma} \bar{G}_1) \quad (6.157)$$

и для n - n корреляций:

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \mu_{0B} \frac{\bar{N}_0 + \frac{\eta}{2} e^{-\mu_0\gamma} \bar{N}_1}{\bar{G}_0 + \frac{\eta}{2} e^{-\mu_0\gamma} \bar{G}_1} . \quad (6.158)$$

Для p_t^2 - n имеем:

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \bar{p}^2 \frac{\bar{P}_0 + \frac{\eta}{2} e^{-\mu_0\gamma} \bar{P}_1}{\bar{G}_0 + \frac{\eta}{2} e^{-\mu_0\gamma} \bar{G}_1} = \bar{p}^2 \left(1 + \frac{\eta}{2} e^{-\mu_0\gamma} \frac{\bar{P}_1 - \bar{G}_1}{\bar{G}_0} \right) . \quad (6.159)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{G}_0 &= \bar{P}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{n_F} \frac{d^k}{k!} , \\ \bar{N}_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{n_F+1} \frac{d^k}{k!} , \\ \bar{G}_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+\gamma)^{n_F} \frac{d^k}{(k-1)!} , \\ \bar{N}_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+\gamma)^{n_F+1} \frac{d^k}{(k-1)!} , \\ \bar{P}_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} (k+\gamma)^{n_F-1} (k+1) \frac{d^k}{(k-1)!} , \end{aligned} \quad (6.160)$$

где $d = M\eta e^{-\mu_0}$.

Для контроля вычислений мы также использовали следующие явные формулы при $n_F = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} \bar{G}_0(0) &= \bar{P}_0(0) = e^d - 1 , \\ \bar{N}_0(0) &= \bar{G}_1(0) = \bar{G}_0(1) = \bar{P}_0(1) = de^d , \\ \bar{N}_1(0) &= \bar{G}_1(1) = (d + \sqrt{2})de^d , \\ \bar{P}_1(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k+\gamma} \frac{d^k}{(k-1)!} , \\ \bar{N}_0(1) &= \bar{G}_0(2) = \bar{P}_0(2) = (d+1)de^d , \end{aligned} \quad (6.161)$$

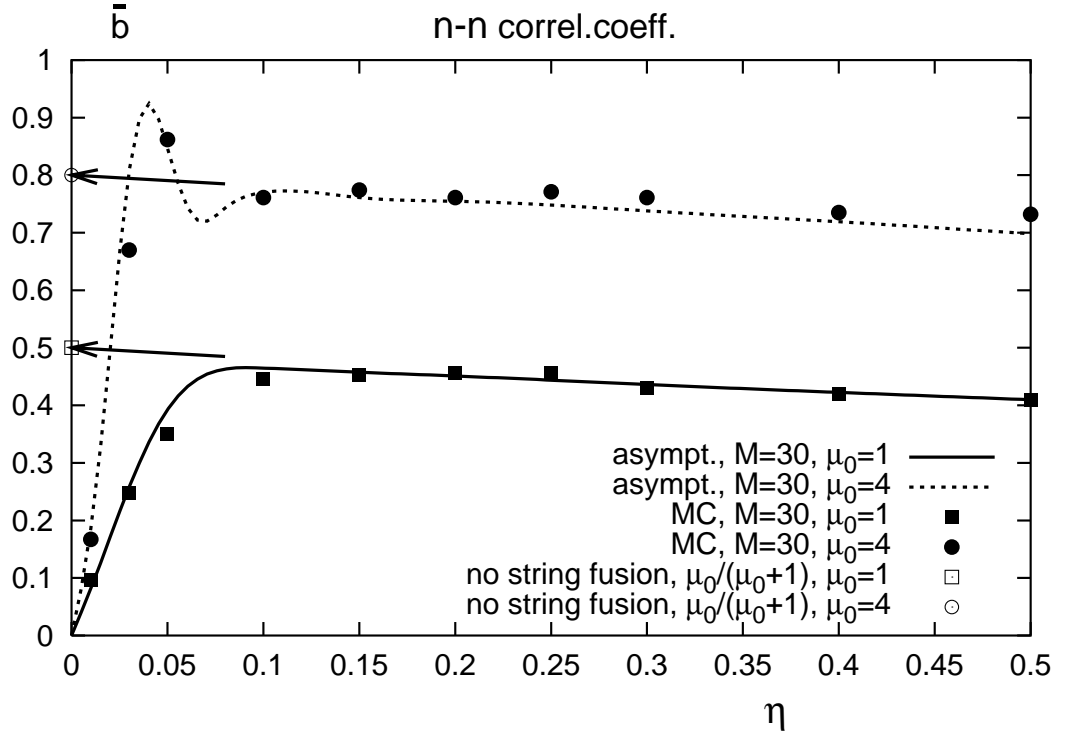


Рисунок 6.7: Коэффициент n - n корреляции при малых значениях η для $\mu_0=1$ и $\mu_0=4$. Кривые - результаты вычислений с использованием асимптотических формул (6.154) и (6.156) при фиксированном значении $M=30$ ($\bar{N} \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow 0$ (6.151)). Точки - результаты прямых вычислений методом Монте-Карло с использованием формулы (6.147). Стрелками показаны значение коэффициента n - n корреляции $\bar{b} = \mu_0/(\mu_0 + 1)$ в случае без слияния струн [300], что соответствует пределу $\bar{N} = const$ ($M \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(1) &= \bar{G}_1(2) = (d^2 + d(1 + 2\sqrt{2}) + 2)de^d, \\ \bar{P}_1(1) &= (d + 2)de^d, \\ \bar{N}_0(2) &= (d^2 + 3d + 1)de^d, \\ \bar{N}_1(2) &= (d^3 + d^2 3(1 + \sqrt{2}) + d(7 + 3\sqrt{2}) + 2\sqrt{2})de^d, \\ \bar{P}_1(2) &= (d^2 + d(3 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{2})de^d. \end{aligned}$$

Результаты вычислений с использованием асимптотических формул (6.154)–(6.156) в первом случае ($M = const$, $\eta \rightarrow 0$, $M\eta \rightarrow 0$ и $\bar{N} \rightarrow 1$) показаны на рисунках рис. 6.7 и 6.8 (кривые) вместе с результатами прямых вычислений методом Монте-Карло с использованием формул (6.147) и (6.148) (точки). Как и предполагалось, в этом случае коэффициенты корреляций как n - n , так и p_t^2 - n стремятся к нулю, когда $\bar{N} \sim 1$, т.е. при $\eta < 1/M$ (6.151). Напомним, что при больших η имела место независимость коэффициентов корреляции от M . Видно, что в этом пределе в области $\eta \leq 1/M$ она исчезает. Это также является причиной нелинейной зависимости коэффициентов корреляции от η в этой области (см. рис. 6.7 и 6.8 для $\mu_0 = 4$).

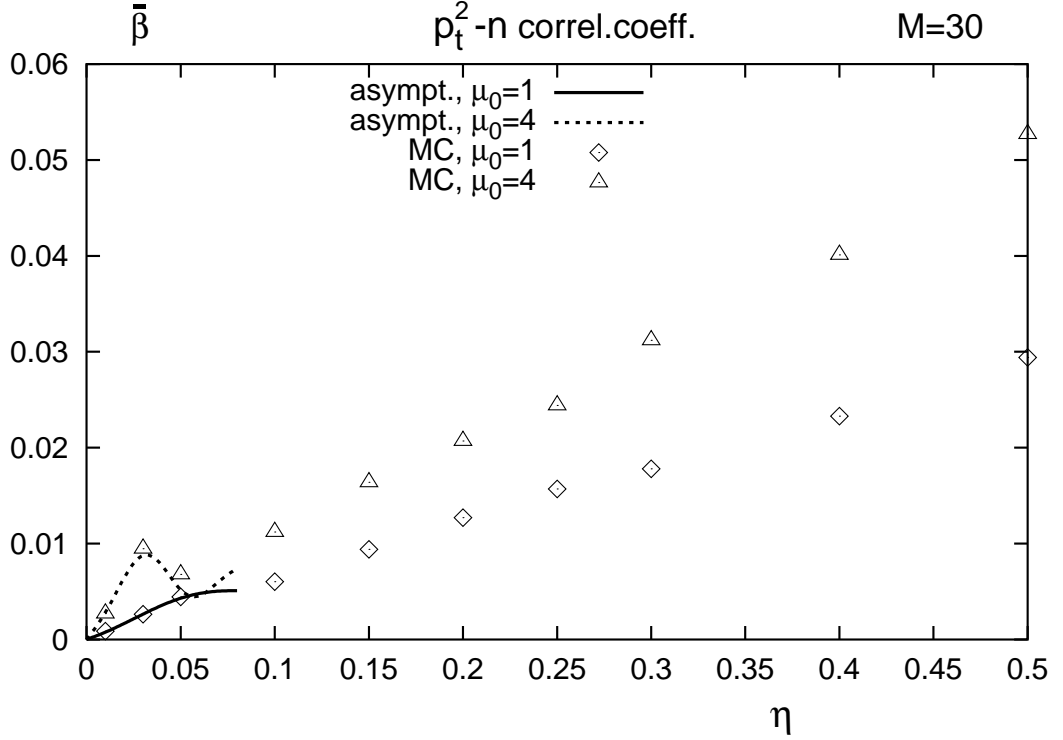


Рисунок 6.8: Коэффициент p_t - n корреляции при малых значениях η для $\mu_0=1$ и $\mu_0=4$. Кривые - результаты вычислений с использованием асимптотических формул (6.155) и (6.156) при фиксированном значении $M=30$ ($\bar{N} \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow 0$ (6.151)). Точки - результаты прямых вычислений методом Монте-Карло с использованием формулы (6.148)

Из сравнения рисунков 6.7 и 6.8 также видно, что используя асимптотические формулы (6.154)–(6.156), нам удастся вычислить коэффициент n - n корреляции в несколько большей области малых η , чем коэффициент p_t^2 - n корреляции. Причина этого в том, что в этих формулах для n - n корреляций имеются вклады порядка $(M\eta)^k$ и $(M\eta)^k\eta$, а для p_t^2 - n корреляций только первый нетривиальный вклад порядка $(M\eta)^k\eta$. Отметим также очень хорошее согласие между результатами вычислений по асимптотическим формулам (6.154)–(6.156) (кривые на рис. 6.7 и 6.8) и результатами прямых вычислений по методу Монте-Карло по формулам (6.147) и (6.148) (точки на рис. 6.7 и 6.8).

Во втором случае, когда при $\eta \rightarrow 0$ удерживаем $\bar{N} = const$ и, следовательно, в силу (6.151) $M\eta = const$, мы имеем $M \rightarrow \infty$. В этом случае можно использовать формулы (6.158)–(6.160) с $d = const$, таким образом, в этом случае в пределе $\eta \rightarrow 0$ находим для n - n корреляций:

$$\langle n_B \rangle_{n_F} = \mu_{0B} \frac{\bar{N}_0}{\bar{G}_0} = \mu_{0B} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k \rho_{M\eta}(k) \rho_{\mu_0 k}(n_F)}{\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{M\eta}(k) \rho_{\mu_0 k}(n_F)}. \quad (6.162)$$

Здесь мы домножили числитель и знаменатель на $e^{-M\eta} \mu_0^{n_F} / n_F!$.

Вспомнив, что $\rho_a(x)$ - распределение Пуассона с $\bar{x} = a$, видим, что формула (6.162) согласуется с формулой для n - n корреляций, полученной

в работе [300] для случая без слияния струн (см. формулу (23) в [300]). Таким образом, будем иметь тот же результат для коэффициента n - n корреляции $b = \mu_0/(\mu_0 + 1)$ как и в случае без слияния (см. стрелки на рис. 6.7 и 6.8).

Для коэффициента корреляции p_t^2 - n в этом пределе находим из (6.159) и (6.160) при $d = const$:

$$\langle p_{tB}^2 \rangle_{n_F} = \overline{p^2}(1 + O(\eta)) \quad (6.163)$$

Таким образом p_t^2 - n корреляции в этом пределе исчезают, как и в случае без слияния струн [300].